CY TECH	**Préing 2 : DS 1 (sujet 2) d'Analyse dans $\mathbb{R}^n$**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Mardi 14 Novembre 2023** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1 page recto verso**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. *Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Questions de cours/TD (5 points)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé quelconque. Soit $r > 0$ et a un point quelconque de E.

1. Soit $A \subset E$. Quelles sont les définitions de : A Ouvert ? A Fermé ? (1 point)
2. Montrer que la boule ouverte de centre a et de rayon r, $B(a, r)$, est un ouvert. (4 points)

.

Correction :

1. Définition d'ouvert : (0.5 point)

   def 1 possible :
   A ouvert $\Longleftrightarrow$ A est voisinage de chacun de ses points.

   def 2 possible :
   A ouvert $\Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \exists r > 0\ /\ B(x, r) \subset A$.

   Définition de fermé : (0.5 point)

   def 1 possible :
   A fermé $\Longleftrightarrow C_E A$ ouvert.

   def 2 possible :
   A fermé $\Longleftrightarrow \forall x \in C_E A,\ \exists r > 0\ /\ B(x, r) \subset C_E A$.

   def 3 possible :
   A fermé $\Longleftrightarrow C_E A$ est voisinage de chacun de ses points.

   Tout autre définition sera refusée. Toute imprécision conduira à 0 pour la définition.

2. Soit $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r. Soit $X \in B(a, r)$ un point quelconque de la boule. Alors, par hypothèse

$$||X - a|| < r$$

Soit $\epsilon = r - ||X - a||$. Or $\forall X \in B(a,r)$, $||X-a|| < r$ et donc $\forall X \in B(a,r)$, $\epsilon > 0$. On introduit alors la boule ouverte centrée en X et de rayon ϵ, $B\Big(X, \epsilon = r - ||X-a||\Big)$.

Soit $Y \in B\Big(X, \epsilon = r - ||X-a||\Big)$ un point quelconque de cette boule. On a alors

$$||Y - X|| < \epsilon = r - ||X - a||$$

Alors

$$\begin{aligned} ||Y-a|| = ||Y - X + X - a|| &\leq ||Y-X|| + ||X-a|| \\ &< r - ||X-a|| + ||X-a|| = r \end{aligned}$$

donc

$$||Y-a|| < r, \text{ ce qui est équivalent à } Y \in B(a,r)$$

Or cela est vrai $\forall Y \in B\Big(X, \epsilon = r - ||X-a||\Big)$, donc

$$\forall X \in B(a,r),\ B\Big(X, \epsilon = r - ||X-a||\Big) \subset B(a,r)$$

Finalement $B(a,r)$ est un ouvert.

1 point si c'est le bon rayon de boule r' qui est donné.
1 point si il est justifié que $r' > 0$.
1 point si il est correctement démontré que $\|Y - a\| < r$.
1 point pour conclure correctement à partir du point précédent.

Exercice 2 : 2 normes sur l'espace des matrices (9 points)

Soit n, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients réels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On définit alors les deux applications

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad g(A) = \max_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} (|a_{ij}|)$$

où a_{ij} est l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

1. Montrer que f et g sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. (4.5 points)
2. Déterminer $\alpha,\ \beta > 0$ tels que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \alpha g(A) \leq f(A) \leq \beta g(A) \quad \text{(2 points)}$$

3. Ces normes sont-elles équivalentes ? (0.5 point)
4. Soit $n = p = 2$. On note $0_{\mathcal{M}_{22}}$, l'élément nul de $\mathcal{M}_{22}$. Soit $S_f(0_{\mathcal{M}_{22}}, r = 1)$ et $S_g(0_{\mathcal{M}_{22}}, r = 1)$ les sphères de rayon 1 et de centre $0_{\mathcal{M}_{22}}$ associées aux normes f et g. Donner un élément C quelconque de $S_f(0_{\mathcal{M}_{22}}, r = 1)$ et un élément D quelconque de $S_g(0_{\mathcal{M}_{22}}, r = 1)$. (2 points)

Correction :

1. Montrons que f est une norme :
   (a) Séparation : (0.5 point)
   Soit $f(A) = 0$, alors
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}| = 0 \Longrightarrow \forall i, j,\ \ a_{ij} = 0$$
   (b) Absolue homogénéité : (0.5 point)
   Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ses éléments seront notés a_{ij}) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λA est la matrice dont ls éléments sont donnés par λa_{ij}. Calculons la norme de ce nouveau vecteur
$$f(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|\lambda a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|\lambda| \times |a_{ij}| = |\lambda|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}| = |\lambda| f(A)$$
   (c) Inégalité triangulaire : (1 point)
   Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (leurs éléments seront notés a_{ij} et b_{ij}). Calculons la norme f de $A + B$
$$f(A+B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\Big[|a_{ij}| + |b_{ij}|\Big] = f(A) + f(B)$$
   car $\forall i, j,\ \ |a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$ (inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$).

   Montrons que g est une norme :
   (a) Séparation : (0.5 point)
   Soit $g(A) = 0$, alors
$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|a_{ij}|) = 0 \Longrightarrow \forall i, j,\ \ a_{ij} = 0$$
   (b) Absolue homogénéité : (0.5 point)
   Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (ses éléments seront notés a_{ij}) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λA est la matrice dont ls éléments sont donnés par λa_{ij}. Calculons la norme de ce nouveau vecteur
$$g(\lambda A) = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|\lambda a_{ij}|) = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|\lambda| \times |a_{ij}|) = |\lambda| \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|a_{ij}|) = |\lambda| g(A)$$
   (c) Inégalité triangulaire : (1.5 point)
   Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (leurs éléments seront notés a_{ij} et b_{ij}). Alors
$$\forall i, j,\ \ |a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|a_{ij}|) + \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}(|b_{ij}|) = g(A) + g(B) \qquad (1)$$
   On voit donc que
$$\forall i, j,\ \ |a_{ij} + b_{ij}| \leq g(A) + g(B)$$

La relation précédente est en particulier vraie pour la valeur de (i, j) qui maximise $|a_{ij} + b_{ij}|$. Donc

$$\max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \Big(|a_{ij} + b_{ij}|\Big) \leq g(A) + g(B)$$

Finalement

$$g(A + B) \leq g(A) + g(B)$$

Pour cette question, il faut vraiment passer par la relation (1). Si cette relation n'est pas écrite alors 0.

2. Déterminons $\alpha,\ \beta > 0$ tels que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \alpha g(A) \leq f(A) \leq \beta g(A)$$

Montrons que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \alpha g(A) \leq f(A)$: (1 point)

Soit A une matrice quelconque de notre espace vectoriel. Alors

$$g(A) = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \Big(|a_{ij}|\Big)$$

Soit (i_0, j_0) le couple de valeurs tel que l'on maximise $|a_{ij}|$. Prenons maintenant la norme f

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| = |a_{i_0j_0}| + \sum_{i\neq i_0}\sum_{j\neq j_0} |a_{ij}| = g(A) + \sum_{i\neq i_0}\sum_{j\neq j_0} |a_{ij}|$$

or $\sum_{i\neq i_0}\sum_{j\neq j_0} |a_{ij}| \geq 0$ d'où l'on déduit que

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ g(A) \leq f(A) \quad (\alpha = 1)$$

Montrons que $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ f(A) \leq \beta g(A)$: (1 point)

$$\forall i, j \quad |a_{ij}| \leq \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \Big(|a_{ij}|\Big) = g(A)$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \leq (n \times p) g(A)$$

Finalement, on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ g(A) \leq f(A) \leq np \times g(A)$$

3. Deux façons de répondre. (0.5 point)

Méthode 1 :
L'inégalité obtenue à la question précédente prouve, par définition, que les deux normes sont équivalentes.

Méthode 2 :
L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace de dimension finie (dim$=np$). Or on sait d'après le cours que sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

4. Commençons par définir ces ensembles (0.5+0.5 point)

$$S_f(0_{\mathcal{M}_{22}}, r=1) = \left\{C \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})/f(C)=1\right\} \Longleftrightarrow \left(C \in S_f(0_{\mathcal{M}_{22}}, r=1) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |c_{ij}| = 1 \right)$$

$$S_g(0_{\mathcal{M}_{22}}, r=1) = \left\{D \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})/g(D)=1\right\} \Longleftrightarrow \left(D \in S_g(0_{\mathcal{M}_{22}}, r=1) \Longleftrightarrow \max_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 2}} \left(|d_{ij}|\right) = 1 \right)$$

On peut par exemple prendre (0.5+0.5 point)

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : un peu de topologie dans $\mathbb{R}$ (6 points)

On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle $|\cdot|$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit les ensembles suivants

$$I_1 =]a; +\infty[\qquad I_2 = [0; 1[\cup]1; 2] \cup \{3\}$$

1. Déterminer si les ensembles précédents sont ouverts, fermés, ou aucun des deux en passant soit directement par les définitions soit en utilisant les suites d'éléments de $\mathbb{R}$. (2 points)
2. Déterminer l'adhérent de I_1 et l'intérieur de I_2 par la méthode de votre choix. (4 points)

Correction :

1. Commençons par I_1 :

Ouvert ? (exemple de méthode)
S'il y a un soucis, le soucis est en $\{a\}$. Soit $x \in I_1$. Considérons alors

$$B\left(x, r = x-a\right) =]x-(x-a); x+(x-a)[=]a; 2x-a[$$

or $\forall x \in I_1$, $r > 0$. De plus $\forall y \in B\left(x, r = x-a\right)$, $y > a$ donc $y \in I_1$. Ainsi $\forall x \in I_1$, $B\left(x, r = x-a\right) \subset I_1$ et donc I_1 est un ouvert.

(0.5 point).

Fermé ? (exemple de méthode)
Soit la suite $u_n = a + \frac{1}{n}$. Alors $\forall n \geq 1$, $u_n \in I_1$. Toutefois

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \notin I_1$$

Donc I_1 n'est pas un fermé. (0.5 point)

Poursuivons avec I_2 :

Ouvert ? (exemple de méthode)
Clairement, il y a un problème en plusieurs points. Nous allons considérer $\{3\}$ par exemple. Soit $r > 0$ et $B(3,r) =]3-r; 3+r[$. Considérons $y = 3 + \frac{r}{2} \in B(3,r)$. Alors, $\forall r > 0$, $y \notin I_2$ et finalement $\forall r > 0$, $B(3,r) \not\subset I_2$ et I_2 n'est pas un ouvert. (0.5 point)

Fermé ? (exemple de méthode)
Soit $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors $\forall n > 2$, $u_n \in I_2$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \notin I_2$$

Donc I_2 n'est pas un fermé. (0.5 point)

2. Détermination de $\overline{I}_1$:

Etape 1 : On propose un candidat sur la base du fait que l'adhérent de I_1 est le plus petit fermé contenant I_1 : $C = [a; +\infty[$ (0.5 point).

Etape 2 : Puis on vérifie que $I_1 \subset C$ et que C est un fermé.

Or par corollaire du cours on sait qu'un ensemble de la forme $[a; +\infty[$ est bien un fermé. De plus, $C = I_1 \cup \{a\}$ d'où l'on déduit que $I_1 \subset C$.

On sait alors que $\overline{I}_1 \subset C$ (0.5 point).

Etape 3 : Il ne reste plus qu'à montrer que $C \subset \overline{I}_1$ ce qui est équivalent à

$$\forall x \in C \backslash I_1,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap I_1 \neq \emptyset$$

où dit autrement que tous les points de $C\backslash I_1$ appartiennent bien à $\overline{I}_1$.

Or ici $C\backslash I_1 = \{a\}$. On peut par exemple introduire la suite

$$u_n = a + \frac{1}{n}$$

donc, pour $n > 0$, tous les éléments de la suite appartiennent à I_1. Or

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

Donc $\{a\}$ appartient bien à $\overline{I}_1$. (1 point)

On a donc $\overline{I}_1 = C = [a; +\infty[$.

Détermination de $\mathring{I}_2$:

Etape 1 (0.5 point) : proposons un candidat sur la base du fait que l'intérieur de I_2 est le plus grand ouvert contenu dans I_2. Ainsi, posons

$$C =]0;1[\cup]1;2[$$

Etape 2 (0.5 point) : Nous devons vérifier que C est bien un ouvert et que $C \subset I_2$.

D'après un corollaire du cours, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, l'intervalle $]a;b[$ est un ouvert. De plus d'après une autre propriété du cours, une union quelconque d'ouvert est un ouvert. Ainsi on déduit que C est bien un ouvert.

De plus $I_2 = C \cup \{0\} \cup \{2\} \cup \{3\}$ ce qui implique que $C \subset I_2$.

D'après le TD, on sait alors que $C \subset \mathring{I}_2$.

Etape 3 (1 point) : Nous devons maintenant vérifier que $\mathring{I}_2 \subset C$.

$$\mathring{I}_2 \subset C \iff \left(\forall x \in I_2 \backslash C, \forall r > 0, B(x,r) \not\subset I_1\right)$$

Ici $I_2 \backslash C = \{0\} \cup \{2\} \cup \{3\}$.

Soit $r > 0$ et soit $B(0,r) =]-r;+r[$ la boule centrée en 0 et de rayon r. Considérons alors $y = -\frac{r}{2} \in B(b,r)$. Or, $\forall r > 0$, $y < 0$ donc $y \notin I_2$. Ainsi $\forall r > 0$, $B(b,r) \not\subset I_2$ et donc $\{0\} \notin \mathring{I}_2$.

De la même façon, nous pouvons montrer que $\{2\}$, $\{3\} \notin \mathring{I}_2$ et finalement

$$\mathring{I}_2 = C =]0;1[\cup]1;2[$$

.

0.5 si $\mathring{I}_2$ est donné sans justificatif ou que le reste de la démonstration est faux.
0.5 si $\overline{I}_1$ est donné sans justificatif ou que le reste de la démonstration est faux.