Séries

Devoir Surveillé 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1

Soit $q \in \mathbb{R}$, à quelle condition sur q la série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge-t-elle ? Le démontrer, et calculer sa valeur.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2-1}{k^2(k+1)^2}.$$

1. Montrer que l'égalité ci-dessus définit bien un réel $S \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que
$$\frac{2k^2-1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k-1}{k^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2}$$

3. En déduire la valeur de $S \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 1} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

2. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$

3. $\sum_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$

4. $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de montrer $\ln(n!) \sim n\ln(n)$. Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, on pose:

$$u_k := \ln(k) \text{ , et } S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n \ln(t)dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} \ln(t)dt$.

2. En déduire: $n\ln(n) \leq S_n \leq (n+1)\ln(n+1)$ (on pourra effectuer une intégration par parties pour calculer les intégrales).

3. Montrer que $S_n = \ln(n!)$ et en déduire $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.