Analyse 1 - Premier semestre 2024 - 2025

Responsable CM : Nicolas Arancibia Robert
Bureau : Site St Martin, Bâtiment E, cinquième étage, Bureau 552
e-mail : nat@cy-tech.fr - nicolas.arancibia-robert@cyu.fr

Évaluation :

- **DS 1 :** Semaine du 12/11/2024 (25%)
- **DS 2 :** Semaine du 09/12/2024 (25%)
- **Examen :** Semaine du 13/01/2025 (40%)
- **Note TD :** (10%)

Modalités d'Évaluations en Mathématiques

Préing 1

CYTech
2024-2025

Modalités d'Évaluation

Vous aurez 4 notes :

- 2 Contrôles continus : $CC1$ et $CC2$, durée 1h, en séance de TD
  - Algèbre 1 : Semaines du 21 Octobre et du 25 Novembre.
  - Analyse 1 : Semaines du 12 Novembre et du 9 Décembre.
- 1 Contôle continu Final : CCF, durée 2h, semaine du 13 Janvier.
- 1 note de TD : TD, donnée par l'enseignant.

On calcule alors une moyenne (pondérée) M

$$M = 0.25 \times (CC1 + CC2) + 0.4 \times CCF + 0.1 \times TD$$

Votre note finale $\boldsymbol{NF}$ est le max entre la moyenne M et le CCF

$$\boldsymbol{NF} = \max(M, CCF).$$

CY TECH sciences et techniques

Exemples

Moyenne : $M = 0.25 \times (CC1 + CC2) + 0.4 \times CCF + 0.1 \times TD$

- Exemple 1

$CC1 = 8$	$CC2 = 17$	$CCF = 9$	$TD = 19$

On calcule la moyenne :

$$M = 0.25 \times (8 + 17) + 0.4 \times 9 + 0.1 \times 19 = 11.75$$

La note finale est le max entre M et CCF donc $\boldsymbol{NF = 11.75}$

- Exemple 2

$CC1 = 15$	$CC2 = 2$	$CCF = 13$	$TD = 12$

On calcule la moyenne :

$$M = 0.25 \times (15 + 2) + 0.4 \times 13 + 0.1 \times 12 = 10.65$$

La note finale est le max entre M et CCF donc $\boldsymbol{NF = 13}$.

Rattrapage pour Absence

En cas d'absence (justifiée ou injustifiée) la note correspondante dans la formule de la moyenne sera 0.
Il y aura à la fin de semestre une épreuve de rattrapage pour les absences qui durera 2h et portera sur l'ensemble du programme du semestre.

Attention ! C'est un rattrapage pour les absences uniquement, indépendant des notes que vous avez obtenues.

Si vous êtes absent.e à l'examen vous devez **obligatoirement** passer l'épreuve de rattrapage.
Si vous êtes absent.e à CC1 ou CC2 vous pouvez passer l'épreuve de rattrapage si vous le souhaitez. Il y aura une unique épreuve de rattrapage qui portera sur l'ensemble du semestre, même si vous la passez pour une absence au CC1 ou CC2.

La note R obtenue au rattrapage remplace le 0 dans le calcul de la moyenne M et de la note finale $\boldsymbol{NF}$.

Exemples

- Exemple 1 | $CC1 = 10$ | $CC2 = 15$ | $CCF =$ABS | $TD = 16$ |

  Rattrapage OBLIGATOIRE. Vous obtenez $R = 12$ qui remplace CCF
  $$M = 0.25 \times (10 + 15) + 0.4 \times \mathbf{12} + 0.1 \times 16 = 12.65$$
  La note finale est le max entre M et $CCF = R = 12$ donc $\boldsymbol{NF = 12.65}$

- Exemple 2 | $CC1 = 12$ | $CC2 =$ ABS | $CCF = 13$ | $TD = 15$ |

  On peut calculer la moyenne :
  $$M = 0.25 \times (12 + \mathbf{0}) + 0.4 \times 13 + 0.1 \times 15 = 9.7$$
  La note finale est le max entre M et CCF donc a priori $\boldsymbol{NF = 13}$.
  Rattrapage optionnel. Vous décidez de passer le rattrapage et obtenez $R = 14$, on recalcule alors
  $$M' = 0.25 \times (12 + \mathbf{14}) + 0.4 \times 13 + 0.1 \times 15 = 13.2$$
  La note finale est le max entre M' et CCF donc $\boldsymbol{NF = 13.2}$.

Défaillance

Vous serez déclaré Défaillant dans les 2 cas suivants :

- Vous avez été absent.e 2 fois parmi les épreuves CC1, CC2 et CCFinal.
- Vous avez été absent.e au CC Final et au Rattrapage.

En cas de défaillance les jurys de fin de semestre et de fin d'année étudieront votre dossier et prendront une décision sur la suite de vos études.

Plan

- **Chapitre 0 :** Mise en jambes - Rappel.
  - Propriétés elementaires de l'ensemble $\mathbb{R}$: relation d'ordre - valeur absolue - equations - inéquations.
  - Utilisation des symboles Σ et Π : Définitions et opérations - sommes et produits télescopiques - sommes et produits usuels.
  - Fonctions trigonométriques : Formules usuelles - Equations trigonométriques.
- **Chapitre 1 :** L'ensemble $\mathbb{R}$.
  - Majorants - Minorants - Min - Max - Borne supérieure - Borne inférieur.
  - $\mathbb{R}$ est archimédien - partie entière - approximation décimale.
  - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- **Chapitre 2 :** Suites numériques.
  - Généralités : définitions - opérations sur les suites.
  - Limites de suites : Définitions - opérations - théorèmes d'existence de limite
  - Suites récurrentes.
  - Extension aux suites complexes.

Plan

- **Chapitre 3** : Limites et continuité de fonctions
  - Limite d'une fonction : limite en un point - limite à droite, à gauche - opérations - théorèmes d'existence de limites.
  - Continuité : définitions - prolongement par continuité - caractérisation séquentielle de la continuité - opérations
  - Les grands théorèmes de la continuité : Théorème des valeurs intermédiaires - Image d'un segment - Théorème de la bijection

Propriétés élémentaires de l'ensemble $\mathbb{R}$

Commencons avec notre étude de l'ensemble $\mathbb{R}$. On commence par introduire l'ensemble de nombres réels et ses sous-ensembles.

Définition

- ***Entiers naturels :***

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

- ***Entiers relatifs :***

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Introduisons aussi

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &= \{1, 2, 3, \cdots\} \\ \mathbb{Z}^* &= \{\cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ a le gros défaut suivant : seuls $n = 1$ et $n = -1$ admettent un inverse, c'est-à-dire un élément $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$nm = 1.$$

Nous remédions à ce problème en introduisant l'ensemble des nombres rationnels.

Définition (L'ensemble $\mathbb{Q}$)

*L'ensemble des **nombres rationnels** est*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

avec des opérations $+$ et $\times$ définis par

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \textit{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exemple : Un exemple important de nombre rationnel, sont les ***nombres décimaux***, c'est-à-dire les nombres de la forme

$$\frac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

On peut choisir comme exemple :

- $1,375 = 1375 \times 10^{-3} = \frac{1375}{1000}$.
- $0,1375 = 1375 \times 10^{-4} = \frac{1375}{10000}$.
- $0,001375 = 1375 \times 10^{-6} = \frac{1375}{1000000}$.

En d'autre termes, un nombre est décimal s'il admet une écriture ***décimale finie***. Le résultat suivant nous donne une caractérisation de $\mathbb{Q}$.

Proposition

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple : Les nombres suivants sont de rationnels :

$$0,8 = \frac{4}{5} \qquad 0,1111\cdots = \frac{1}{9} \qquad 23,12505505505\cdots = 23,12\overline{505}.$$

Nous n'allons pas démontrer la proposition, mais voyons comment le sens ($\Longleftarrow$) marche sur un exemple : **Montrons que** $r = 23,12\overline{505}$ **est rationnel.**

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Ici la période commence deux chiffres après la virgule, on multiplie par 100 :

$$100r = 2312,505505505\cdots . \tag{1}$$

Maintenant on va décaler tout vers la gauche de la longueur d'une période, donc ici on multiplie encore par 1000 pour décaler de 3 chiffres :

$$1000 \times 100r = 2312505,505505505\cdots . \tag{2}$$

Les parties après la virgule des deux lignes (1) et (2) sont les mêmes, si on les soustrait en faisant (2) - (1) les parties décimales s'annulent :

$$1000 \times 100r - 100r = 2312505 - 2312.$$

Donc $99900r = 2310193$ et

$$r = \frac{2310193}{99900} \quad \Longrightarrow \quad 23,12\overline{505} = \frac{2310193}{99900}.$$

Remarque : on peut aussi utiliser la somme d'une suite géométrique !

Propriétés élémentaires de l'ensemble $\mathbb{R}$

Remarque : La notion de nombre permet de **compter** ; c'est le cas bien sûr pour les entiers naturels, pour les entiers relatifs (qui peuvent **« compter des dettes »**), pour les rationnels (qui permettent de former des **« parts égales » d'une même quantité**).

Depuis longtemps, elle est également utilisée pour mesurer des **longueurs**. Vous avez l'habitude d'attacher à chaque segment de droite une longueur et de considérer que cette longueur est un nombre ; il est alors naturel d'additionner des longueurs, de les multiplier (pour obtenir des aires), etc.

On peut alors s'appuyer sur les théorèmes de la géométrie pour calculer certaines longueurs. Dans ce contexte, le ***Théorème de Pythagore*** a une conséquence célèbre : **la longueur de la diagonale d'un carré** dont les **côtés ont pour longueur un mètre**, doit être donnée par un **« nombre »** dont le carré vaut

$$1^2 + 1^2 = 2.$$

Théorème (Irrationnalité de $\sqrt{2}$)

Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à 2. L'equation $p^2 = 2$ n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Nombres élémentaires de l'ensemble $\mathbb{R}$

Le théorème précédent a été découvert au moins cinq siècles avant notre ère ; on l'attribue en général aux ***pythagoriciens***. Il y a au moins deux réactions possibles à ce fait :

1. Considérer que le mot **« nombre »** doit être réservé aux rationnels et séparer tout ce qui se rapporte à la notion de longueur en géométrie de ce qui se rapporte à l'arithmétique.
2. étendre la signification donnée au mot **« nombre »** pour que ce mot puisse désigner la longueur de **« tout »** segment de droite.

La première réaction n'est pas absurde : elle fut longtemps dominante. De la deuxième réaction est issue la notion de ***nombre réel*** à laquelle vous êtes habitués.

Définition

Nous notons par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. L'ensemble de nombres irrationnels $\mathbb{I}$ est défini par

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exemple : Les nombres suivants sont irrationnels :

- $\sqrt{2} = 1,4142\cdots$,
- $\pi = 3,14159265\cdots$
- $e = 2,718\cdots$

Les différents ensembles introduis jusqu'à maintenant, sont liés par les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Propriétés élémentaires de l'ensemble $\mathbb{R}$

Finalement, notons par

- $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q}$ privé de 0.
- $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0.
- $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

Propriétés élémentaires de l'ensemble $\mathbb{R}$

Passons maintenant à une étude plus détaillé de $\mathbb{R}$. Plus précisément nous allons définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ça nous permettra :

- définir la valeur absolue.
- étudier le comportement de certaines fonctions par rapport aux inégalités.
- parler de majorant, minorant et surtout introduire la très importante notion de borne supérieure et inférieure.
- introduire la notion d'intervalle.
- définir la fonction partie entière.
- introduire la notion d'ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

On commence par introduire une relation d'ordre sur l'ensemble des nombres réels.

Définition ($\leq$)

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ défini comme suit : pour toute couple x, $y \in \mathbb{R}$ on définit :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$$
$$x < y \iff (x \leq y \quad \text{et} \quad x \neq y).$$

*L'ordre $\leq$ est une **relation d'ordre (total)**, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :*

- ***Réflexivité** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.*
- ***Antisymétrie** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \implies x = y$.*
- ***Transitivité** : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \implies x \leq z$.*
- ***Elle est totale** : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Étudions la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication.

Proposition (Somme)

Soit a, b, c, d des nombres réels.

- ***Somme*** *:*
  - *Nous avons*

$$a \leq b \quad \textit{si et seulement si} \quad a + c \leq b + c.$$

  - *Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors*

$$a + c \leq b + d.$$

Proposition (Produit)

Soit a, b, c, d des nombres réels.

- ***Produit :***
  - *Pour tout $c > 0$, nous avons*

    $$a \leq b \quad \textit{si et seulement si} \quad ac \leq bc.$$

  - *Pour tout $c < 0$, nous avons*

    $$a \leq b \quad \textit{si et seulement si} \quad ac \geq bc.$$

  - *Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors*

    $$ac \leq bd.$$

- ***Passage à l'inverse :*** *Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ou $a, b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $a \leq b$, alors*

  $$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Exemples :

- Pour $x \leq y$, montrer l'inégalité $1 - x \geq 1 - y$.

  Réponse : Comme $x \leq y$ on a $-y \leq -x$, d'où on obtient

$$1 - y \leq 1 - x \quad \Longrightarrow \quad 1 - x \geq 1 - y.$$

- Pour $x \leq y \in [0, 1[$, montrer l'inégalité $\frac{x}{1-x} \leq \frac{y}{1-y}$.

  Réponse : On a $-x \geq -y$, donc

$$1 - x \geq 1 - y > 0 \quad (\text{car } y < 1)$$

  par passage à l'inverse

$$0 < \frac{1}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - y}.$$

  Comme $0 \leq x \leq y$, en multipliant les deux derniers inégalités, on obtient

$$\frac{x}{1 - x} \leq \frac{y}{1 - y}.$$

Remarque :

- **Majorer** une fraction de réels positifs, c'est **majorer** son numérateur et **minorer** son dénominateur.
- **Minorer** une fraction de réels positifs, c'est **minorer** son numérateur et **majorer** son dénominateur.

Exemple : Soit $x \in [1, 2]$. On souhaite encadrer grossièrement le réel

$$\frac{2x+1}{3x^2+4}$$

par un calcul simple.

Réponse :

- Comme $1 \leq x \leq 2$ on obtient $2 \leq 2x \leq 4$ d'où $3 \leq 2x+1 \leq 5$.
- Comme $1 \leq x \leq 2$ on obtient $1 \leq x^2 \leq 4$, puis $3 \leq 3x^2 \leq 12$. D'où $7 \leq 3x^2+4 \leq 16$.

Enfin, par passage à l'inverse, on conclut

$$\frac{3}{16} \leq \frac{2x+1}{3x^2+4} \leq \frac{5}{7}.$$

Intervalles de $\mathbb{R}$

Maintenant qu'on a défini une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, rappelons la notion d'intervalle.

Définition (Intervalle de $\mathbb{R}$)

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \leq t \leq y \quad \Longrightarrow \quad t \in I.$$

Remarque : De une manière plus géométrique, les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui « **n'ont pas de trou** ».

Intervalles de $\mathbb{R}$

La proposition suivant nous donne une caractérisation des **« parties sans trou »** de $\mathbb{R}$.

Proposition (Classification des intervalles)

Soit $a,\ b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a \leq b$. *Les intervalles de* $\mathbb{R}$ *sont exactement les ensembles :*

- ***Segment (ou intervalle fermé) :***

$$[a,b] \quad = \quad \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

- ***Intervalle ouvert :***

$$\begin{aligned}
]a,b[\quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
]a,+\infty[\quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\} \\
]-\infty,b[\quad &= \quad \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\} \\
]-\infty,+\infty[\quad &= \quad \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Proposition (Classification des intervalles (Continuation))

- ***Intervalle semi-ouvert à droite :***

$$\begin{aligned} [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}. \end{aligned}$$

- ***Intervalle semi-ouvert à gauche :***

$$\begin{aligned}]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \\ ]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}. \end{aligned}$$

Valeur Absolue

Passons maintenant à étudier la notion de valeur absolue.

Définition (Valeur absolue)

*Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :*

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Ce réel est positif ou nul, et nul seulement si $x = 0$.

Remarque : La définition même de $|\cdot|$ nous indique comment prouver que

$$|x| \leq a.$$

Il faut montrer que $x \leq a$ et $-x \leq a$, c'est-à-dire ils nous faut montrer

$$-a \leq x \leq a.$$

Cette astuce utile est à retenir : une inégalité invoquant une valeur absolue se montre en montrant deux inégalités.

Valeur Absolue

Nous avons le résultat suivant.

Proposition

Soit a un réel quelconque et r ***un réel strictement positif****. Alors :*

- $|x-a| \leq r$ *est équivalent à* $x \in [a-r, a+r]$. *C'est-à-dire*

$$|x-a| \leq r \quad \textit{si et seulement si} \quad a-r \leq x \leq a+r$$

- $|x-a| \geq r$ *est équivalent à* $x \in]-\infty, a-r]$ *ou* $x \in [a+r, +\infty[$. *C'est-à-dire*

$$|x-a| \geq r \quad \textit{si et seulement si} \quad x \leq a-r \quad \textit{ou} \quad a+r \leq x.$$

Remarque :

- Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalites strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.
- **Interprétation géométrique** : La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x-a|$ est la distance de a à x. Si $r \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq r$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à r.

Valeur Absolue

Exemple : Trouver une expression de $|x-3|-|x+2|$ qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue.

Réponse : On a

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

La quantité $|x-3|-|x+2|$ nous oblige donc à distinguer trois intervalles :$]-\infty,-2[$, $[-2,3[$ et $[3,+\infty[$. Par conséquent

- Si $x \in]-\infty,-2[$ alors
$$|x-3|-|x+2| = -(x-3)+(x+2) = 5.$$
- Si $x \in [-2,3[$ alors
$$|x-3|-|x+2| = -(x-3)-(x+2) = 1-2x.$$
- Si $x \in [3,+\infty[$ alors
$$|x-3|-|x+2| = (x-3)-(x+2) = -5.$$

Valeur Absolue

Exemple : Résoudre l'équation : $|x-4| = 2x+10$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Réponse : On a deux cas à étudier

- Pour tout $x \geq 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \Longleftrightarrow x-4 = 2x+10 \Longleftrightarrow x = -14.$$

  Or :$-14 \notin [4,+\infty[$, l'équation n'a donc pas de solution sur $[4,+\infty[$.

- Pour tout $x < 4$:

$$|x-4| = 2x+10 \Longleftrightarrow 4-x = 2x+10 \Longleftrightarrow 3x = -6 \Longleftrightarrow x = -2.$$

  Comme $-2 \in]-\infty,4[$, -2 est bien solution. C'est finalement la seule solution sur $\mathbb{R}$.

Valeur Absolue

Étudions l'effet de la valeur absolue sur la somme et le produit

Proposition

Pour tous réels x, y on a

1. $|x| = 0$ *alors* $x = 0$.
2. $$|xy| = |x| \cdot |y|.$$
3. ***Inégalité triangulaire*** *:*
$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y| \end{aligned}$$

Valeur Absolue

Démonstration.

1. Puisque $|x| = 0$, nous avons $x \leq 0$ et $-x \leq 0$, i.e. $x \leq 0$ et $x \geq 0$. Ainsi, $x = 0$.
2. Traitons différents cas selon les signes de x et y. Si x, $y > 0$, nous obtenons

$$x = |x| \quad \text{et} \quad y = |y|$$

et l'égalité est claire. Si $x, y < 0$, nous obtenons

$$x = -|x| \quad \text{et} \quad y = -|y|$$

et l'égalité est également claire. Les cas $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$ suivent aussi facilement.

$\square$

Suite.

3.
- Commençons par la première inégalité. Les inégalités $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$ impliquent
$$x + y \leq |x| + |y|.$$
De même, $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$ impliquent
$$-(x + y) \leq |x| + |y|.$$
Ainsi, $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$, d'où $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Pour la deuxième inégalité, appliquons la première inégalité triangulaire
$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$
Donc, $|x| - |y| \leq |x - y|$. Par la symétrie du rôle de x et y, on a
$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$
Ainsi, $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$, d'où on obtient
$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

$\square$

Valeur Absolue

Exemple : Pour $x, y \in]-1, 1[$, montrer que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

Solution : Puisque

$$0 \leq |x| < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq |y| < 1$$

on déduit en multipliant les inégalités

$$0 \leq |x| \cdot |y| < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq |xy| < 1.$$

Ainsi

$$-1 < xy < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 + xy.$$

Pour $x, y \in]-1, 1[$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 \quad & \Longleftrightarrow \quad |x+y| < |1+xy| = 1 + xy \\
& \Longleftrightarrow \quad -1 - xy < x + y < 1 + xy \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 < x + y + xy + 1 \quad \text{et} \quad 0 < 1 + xy - x - y \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 < (1+x)(1+y) \quad \text{et} \quad 0 < (1-x)(1-y)
\end{aligned}$$

Valeur Absolue

Maintenant

$$\begin{aligned}
0 &< (1+x)(1+y) \qquad \text{est vrai} \quad \text{car} \quad x > -1 \quad \text{et} \quad y > -1\\
0 &< (1-x)(1-y) \qquad \text{est vrai} \quad \text{car} \quad x < 1 \quad \text{et} \quad y < 1.
\end{aligned}$$

En remontant les équivalences, on a donc prouvé l'inégalité voulue.

Rappel sur les puissances et les racines carrées

Définition (Puissance)

Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

- *On appelle* x ***puissance*** n *le nombre* x^n *défini par*

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n\ fois} \quad \text{avec} \quad x^0 = 1 \ (\text{par convention}).$$

- *Si* $x \neq 0$, *on appelle* x ***puissance*** *-*n *le nombre* x^{-n} *défini par*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}.$$

On a les règles de calcul suivants : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^n x^m \\ x^{nm} &= (x^n)^m \\ (xy)^n &= x^n y^n. \end{aligned}$$

Ces formules sont encore vraies si m *ou* n *est négatif à condition que* x *et* y *soient non nuls.*

Rappel sur les puissances et les racines carrées

Définition (Racine carrées)

Soit $x \geq 0$*. Il existe un et un seul réel* $r \geq 0$ *pour lequel*

$$x = r^2.$$

On l'appelle la ***racine carrée*** *de* x *et on le note* $\sqrt{x}$*. On a les règles de calcul suivants : pour tous* $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &= \sqrt{x}\sqrt{y} \\ \sqrt{x^2} &= |x|. \end{aligned}$$

Rappel sur les puissances et les racines carrées

Étudions le comportement des carrés et racines carrées par rapport aux égalités.

Proposition

Pour tous a, x, $y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$ax = ay \iff a = 0 \ \text{ ou } \ x = y.$$

Si $a \in \mathbb{R}^*$, *alors*

$$ax = ay \iff x = y.$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ *:*

$$a^2 = b^2 \iff a = b \ \text{ ou } \ a = -b \iff |a| = |b|.$$

Pour $a \geq 0$

$$x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \ \text{ et } \ x \geq 0.$$

Exemples :

- Résoudre l'équation : $|x-2| = 2|x+1|$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

  Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} |x-2| = 2|x+1| \quad &\iff \quad (x-2)^2 = 4(x+1)^2 \\ &\iff \quad x^2 - 4x + 4 = 4x^2 + 8x + 4 \\ &\iff \quad 0 = 3x^2 + 12x = 3(x(x+4)) \\ &\iff \quad 0 = x(x+4) \iff x = 0 \text{ ou } x = -4. \end{aligned}$$

- Résoudre l'équation : $\sqrt{x+8} = x+2$ d'inconnu $x \in [-8, +\infty[$.

  Réponse : Pour tout $x \in [-8, +\infty[$, nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{x+8} = x+2 \quad &\iff \quad x+8 = (x+2)^2 \quad \text{et} \quad x+2 \geq 0 \\ &\iff \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \text{et} \quad x \geq -2 \\ &\iff \quad x \in \{-4, 1\} \quad \text{et} \quad x \geq -2 \\ &\iff \quad x = 1. \end{aligned}$$

  Donc $x = 1$.

Rappel sur les puissances et les racines carrées

Étudions le comportement des racines carrées par rapport aux inégalités.

Attention : Pour $x, a \in \mathbb{R}$

$$x \leq a \quad \text{n'implique pas} \quad x^2 \leq a^2$$

De même,

$$x^2 \leq a^2 \quad \text{n'implique pas} \quad x \leq a$$

Par exemple, nous avons

$$-2 \leq 1 \ \text{ et } \ (-2)^2 > 1.$$

De même

$$1 \leq (-2)^2 \ \text{ et } \ 1 > -2.$$

Par contre nous avons le résultat suivant.

Proposition

Pour tous $x, a \in \mathbb{R}$*, on a*

$$x^2 \leq a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leq |a|.$$

Pour $x, a \geq 0$

$$x \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq a^2.$$

Et pour $x \geq 0$ *seulement*

$$x \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq a^2 \quad \textit{et} \quad a \geq 0.$$

Exemple : Résoudre l'inéquation : $|x-1| \leq |2x+1|$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

Réponse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |2x+1| &\iff (x-1)^2 \leq (2x+1)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 + 4x + 1 \\ &\iff 0 \leq 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \\ &\iff 0 \leq x(x+2). \end{aligned}$$

Par conséquent, x est solution de l'inéquation si $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$.

Le symbole Σ

Passons maintenant à étudier plus en profondeur la somme et le produit.

Définition (Le symbole Σ)

Soit m et n deux entiers naturels avec $m \leq n$. Alors pour tous $a_m, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ la somme

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

sera notée

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

La notation $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$ se lit par exemple :

somme pour i variant de m à n des a_i

Le symbole Σ

Remarques :

- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur de la somme. C'est-à-dire

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

  On choisit traditionnellement les lettres $i,\ j,\ k$, etc. pour les indices de sommes.

- La somme $\sum_{i=m}^{n} a_i$ comporte $n - m + 1$ termes.

Le symbole Σ

Exemples :

- Calculer

$$\sum_{i=2}^{n+1} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{(n+1)-2+1 \text{ fois}} = n.$$

- Calculer

$$\sum_{i=1}^{n} i.$$

Réponse : Nous allons voir un peu plus tard que la valeur de cette somme est

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Le symbole Π

Nous avons parlé de la somme, parlons maintenant du produit.

Définition (Le symbole Π)

Soit m et n deux entiers naturels avec $m \leq n$. Alors pour tous $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, le produit

$$a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$$

sera notée

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Comme pour la somme nous avons les remarques suivants :

Remarque :

- La lettre i est une variable muette, autrement dit on peut la changer par n'importe quelle autre lettre sans changer la valeur du produit.
- La produit $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i$ comporte $n - m + 1$ termes.

Le symbole Π

Un exemple important de produit, est donné par la factorielle.

Définition (**Factorielle**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la factorielle de n par

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{k=1}^{n} k \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n. \end{aligned}$$

*On lit « **factorielle** n ». D'après la convention sur le produit vide*

$$0! = 1.$$

Remarque : Si $n \geq 1$, nous avons

$$n! = n(n-1)!.$$

Le symboles Σ et Π

La somme et le produit satisfont la propriété suivant.

Proposition (Relation de Chasles)

Soit m, n et p trois entiers naturels avec $m \leq p \leq n$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

De même

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right).$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Étudions quelques méthodes de calculs pour la somme et le produit.

Méthode 1 : Règles de calcul pour la somme.

Proposition (Linéarité de la somme)

Soit m et n deux entiers naturels avec $m \leq n$ et

$$\{a_m, \cdots, a_n\} \quad ; \quad \{b_m, \cdots, b_n\}$$

deux familles de nombres réels. Alors

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=m}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Remarque : Si on combine les deux propriétés précédentes, on a

$$\sum_{i=m}^{n} (\lambda a_i + \beta b_i) \quad = \quad \lambda \sum_{i=m}^{n} a_i + \beta \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Méthode 1 : Règles de calcul pour le produit.

Proposition

- ***Multiplicativité*** *:*

$$\prod_{i=m}^{n}(a_i b_i) \quad = \quad \prod_{i=m}^{n} a_i \prod_{i=m}^{n} b_i$$

- ***Passage à la puissance*** *:*

$$\prod_{i=m}^{n} a_i^p \quad = \quad \left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)^p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

- ***Constante*** *: Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda \cdot a_k \quad = \quad \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Méthode 2 : Simplification télescopique cas de la somme.

Définition

On appelle ***somme télescopique*** *toute somme du type suivant*

$$\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1}-a_i).$$

Ces sommes se calculent merveilleusement bien. En effet

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(a_{i+1}-a_i) = & \quad a_{m+1}-a_m \\ + & \quad a_{m+2}-a_{m+1} \\ + & \quad a_{m+3}-a_{m+2} \\ \vdots & \\ + & \quad a_n-a_{n-1} \\ + & \quad a_{n+1}-a_n \\ & \quad \overline{\phantom{a_{m+2}-a_{m+1}}} \\ = & \quad a_{n+1}-a_m.\end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat suivant.

Proposition (Simplification télescopique)

Pour tous $a_m, \cdots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ *avec* $m \leq n$, *on a*

$$\sum_{i=m}^{n} a_{i+1} - a_i \;=\; a_{n+1} - a_m.$$

Méthode 2 : Simplification télescopique cas du produit.

Proposition (Simplification télescopique)

Pour tous $a_m, \ \cdots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^*$ *(tous non nuls) avec* $m \leq n$, *on a*

$$\prod_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Remarque : La vraie difficulté n'est pas de calculer, mais de repérer les sommes et les produits télescopiques en les mettant sous la bonne forme.

Exemple : Calculer

$$\prod_{k=54}^{156} \frac{2k+3}{2k+1}.$$

Solution : Soit $a_k = 2k+1$, alors

$$2k+3 = 2(k+1)+1 = a_{k+1}.$$

Donc

$$\prod_{k=54}^{156} \frac{2k+3}{2k+1} = \prod_{k=54}^{156} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{156+1}}{a_{54}} = \frac{a_{157}}{a_{54}} = \frac{2\times 157+1}{2\times 54+1} = \frac{315}{109}.$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Méthode 3 : Changement d'indices cas de la somme.

Commençons par un exemple :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 &= 1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} j^2.\end{aligned}$$

Nous avons changé d'indice : au lieu de calculer pour k entre 0 et n, nous avons posé $j=k+1$ qui est entre 1 et $n+1$, ce qui simplifie l'expression de la somme.

$$k \in [\![0,n]\!] \underset{j=k+1}{\iff} j \in [\![1,n+1]\!].$$

Remarque : Comme l'indice est muet, on peut garder la lettre k dans la seconde somme. On n'est pas obligé de la remplacer par j (même si c'est plus facile au début).

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

On peut procéder à un changement d'indice pour deux types de raison :

• **Décalage d'indice :** Le décalage d'indice revient à utiliser un indice translaté d'une valeur fixe. Par exemple, en posant $j = k + p$ avec $p \leq m$, on obtient

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+p} = \sum_{j=m+p}^{n+p} a_j.$$

- On repère le changement d'indice que l'on souhaite réaliser, par exemple $j = k + p$ dans le cas ci-dessus pour transformer a_{k+p} en a_j.

- On cherche les premières et dernières valeurs de la somme. Dans notre exemple, la première commence par $k = m$, ainsi

  $$k = m \quad \Longrightarrow \quad j = m + p.$$

  Il faut donc que la nouvelle somme commence à $j = m + p$. La première somme se termine avec $k = n$, ainsi

  $$k = n \quad \Longrightarrow \quad j = n + p.$$

  Il faut donc que la nouvelle somme finisse avec $j = n + p$.

La deuxième raison qui nous amème à realiser un changement d'indice est :

• **Inversion de l'ordre de sommation** : Pour inverser l'ordre de sommation (lire la somme en sens contraire) pour k variant de 0 à n, on remplace k par $j = n - k$ qui varie de 0 à n.

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} a_j.$$

Méthodes de calculs pour la somme et le produit

Méthode 3 : Changement d'indices cas du produit. Comme pour la somme, on peut procéder à un changement d'indice pour deux types de raison :

• **Décalage d'indice :** Le décalage d'indice revient à utiliser un indice translaté d'une valeur fixe. Par exemple, en posant $j = k + p$ avec $p \leq m$, on obtient

$$\prod_{k=m}^{n} a_{k+p} = \prod_{j=m+p}^{n+p} a_j.$$

• **Inversion de l'ordre de multiplication** : Pour inverser l'ordre de multiplication (lire le produit en sens contraire) pour k variant de 0 à n, on remplace k par $j = n - k$ qui varie de 0 à n.

$$\prod_{k=0}^{n} a_{n-k} = \prod_{j=0}^{n} a_j.$$

Méthode 4 : **Indices pairs/impairs**.

Séparation des termes d'indices pairs et impairs : Lorsque le signe change en fonction de la parité de n, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs.

Exemple : Calculer

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n}(-1)^k k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n}(-1)^k k \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k \\
&= \sum_{2\leq 2i\leq 2n} 2i - \left(\sum_{1\leq 2i-1\leq 2n-1} 2i-1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2i - \left(\sum_{i=1}^{n} 2i-1\right) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1 = n.
\end{aligned}$$

Sommes usuelles

Étudions quelques sommes classiques.

Proposition (Somme de constantes)

Soit $a \in \mathbb{R}$, soient $m \leq n$ deux entiers. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} a \quad = \quad (n-m+1)a \quad = \quad (\textit{nombre de termes}) \times a.$$

Proposition (Somme arithmétiques)

Soient m et n deux entiers avec $m \leq n$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} k \quad = \quad \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}.$$

En particulier

$$\sum_{k=0}^{n} k \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sommes usuelles

Proposition (Somme géométrique)

Soit $q \neq 1$. *Soient* m *et* n *deux entiers avec* $m \leq n$. *Alors*

$$\sum_{i=m}^{n} q^i \quad = \quad q^m \cdot \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

En particulier

$$\sum_{i=0}^{n} q^i \quad = \quad \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Comme dernier exemple étudions les sommes binomiales. Pour cela, on commence par introduire les coefficients binomiaux.

Définition (Coefficient binomial)

*Pour tout $n,\ k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$, on appelle **coefficient binomial** de paramètres $n,\ k$, le nombre*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit : k **parmi** n. **Par convention** : si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$.*

Sommes binomiales

Donons quelques propriétés des coefficients binomiaux

Proposition (Propriétés des coefficients binomiaux)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ *avec* $k \leq n$.

- ***Symétrie :***

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- *Pour* $k \neq 0$ *:*

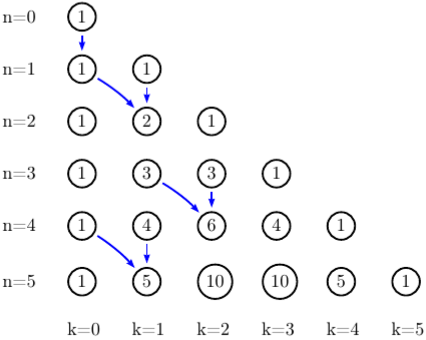
$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

- ***Triangle de Pascal*** *:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Remarque : La dernière formule à l'immense intérêt de donner une relation sommatoire entre les coefficients binomiaux. Elle permet d'obtenir facilement les coefficients binomiaux par récurrence

Elle s'illustre et se mémorise à travers le triangle de Pascal.



Pour trouver un coefficient binomial, on fait la somme de celui juste au dessus et de celui au dessus à gauche. Et si l'un des deux n'existe pas pour la somme, on prend seulement la valeur de celui qui existe. Par exemple, pour obtenir $\binom{5}{1}$, on fait la somme du 1 et du 4 au dessus (eux-mêmes obtenus à partir des éléments supérieurs). Cela revient à faire le calcul :

$$\binom{5}{1} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} = 1 + 4 = 5.$$

Sommes binomiales

Le triangle de Pascal nous permet de conclure le résultat suivant.

Corollaire

Les coefficients binomiaux sont des entiers.

Maintenant que nous avons introduit les coefficients binomiaux, parlons des sommes binomiales.

Théorème (Formule du binôme)

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad = \quad (x+y)^n.$$

Sommes binomiales

Exemple : En utilisant la formule du binôme nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

et

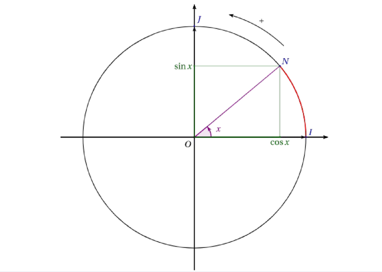
$$\begin{aligned} 0 = (1+(-1))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k. \end{aligned}$$

Rappel sur les fonctions trigonométriques

Nous allons finir ce chapitre revision avec un courte étude d'une famille très importante de fonctions : **les fonction trigonométriques**.

Définition (Fonctions cosinus et sinus)

Considérons le cercle de centre O de rayon 1 :



*orienté dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre). Prennons un point N de coordones (a, b) sur le cercle et notons par x une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$. Alors on appelle :*

- ***cosinus** de x, noté $\cos x$ l'abscisse du point N :*

$$\cos x = a.$$

- ***sinus** de x, noté $\sin x$ l'ordonnée du point N :*

$$\sin x = b.$$

Remarque : Puisque pour tout point (a, b) du cercle trigonométrique, nous avons

$$-1 \leq a \leq 1, \quad -1 \leq b \leq 1 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

on conclut

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

La notation suivante va se montrer utile par la suite.

Notation : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que

$$x \text{ est congru à } y \text{ modulo } \theta,$$

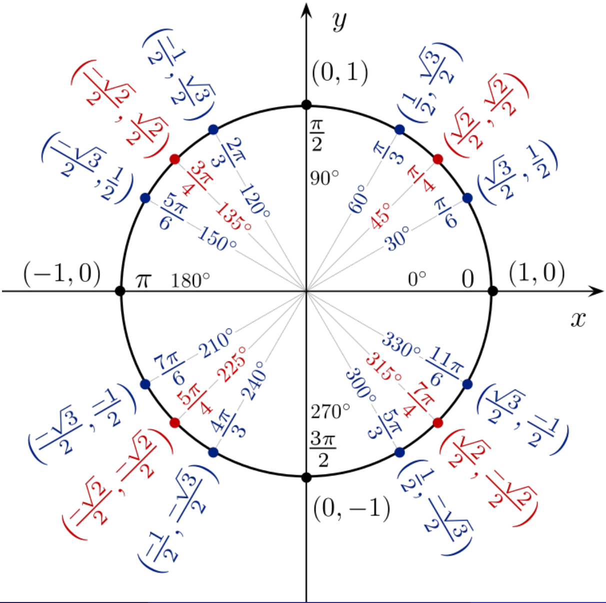
ce qu'on note :

$$x \equiv y \ [\theta],$$

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - y = k \cdot \theta \quad \Longleftrightarrow \quad x = y + k \cdot \theta.$$

Fonctions Trigonométriques



Fonctions sinus et cosinus

Donnons quelques propriétés des fonctions cosinus et sinus.

Proposition (Propriétés)

- *Les fonctions* $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 2π*-périodiques, c'est-à-dire, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, nous avons*

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \textit{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x).$$

- *La fonction sinus est* ***impaire*** *:*

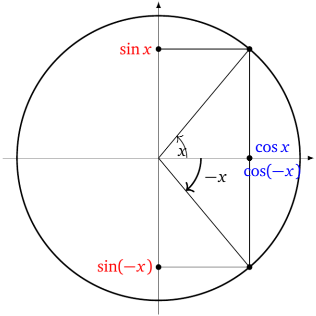
$$\sin(-x) \;=\; -\sin x$$

et la fonction cosinus est ***paire*** *:*

$$\cos(-x) \;=\; \cos x.$$

Rappel sur les fonctions sinus et cosinus

En étudiant le cercle trigonométrique, on peut facilement verifier la parité des fonctions trigonométriques.



La parité des fonctions trigonométriques nous permet de montrer

Proposition

- ***Résolution d'équations :*** *pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin y \iff x \equiv y\ [2\pi] \quad \textit{ou} \quad x \equiv \pi - y\ [2\pi]. \\ \cos x &= \cos y \iff x \equiv y\ [2\pi] \quad \textit{ou} \quad x \equiv -y\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Rappel sur les fonctions sinus et cosinus

Grâce au cercle trigonométrique, et avec des considérations géométriques simples, on peut aussi voir que les fonctions sinus et cosinus satisfont les relations suivantes.

Proposition (Transformations affines)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \quad ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \end{aligned}$$

Fonctions sinus et cosinus

En effet, en regardant le cercle cercle trigonométrique on conclut :

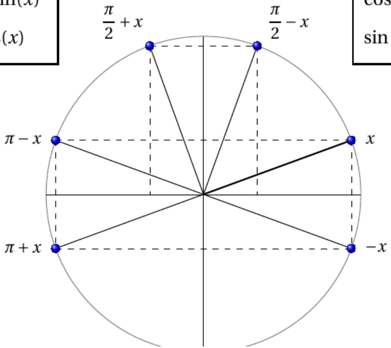
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$



Fonctions sinus et cosinus

Exemple : Résoudre l'équation

$$\sin x = \cos x$$

Solution : Nous avons

$$\begin{aligned}
\sin x = \cos x \quad & \Longleftrightarrow \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{2} - x \ [2\pi] \quad \textsf{ou} \quad x \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ [2\pi] \\
& \Longleftrightarrow \quad 2x \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad \textsf{ou} \quad \underbrace{0 \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]}_{\textsf{impossible}}
\end{aligned}$$

Donc $\sin x = \cos x$ si et seulement si

$$2x \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad x \equiv \frac{\pi}{4} \ [\pi].$$

Fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus satisfont aussi les propriétés suivantes.

Proposition (Formules d'addition)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x+y) \;=\; \sin x \cos y + \cos x \sin y \;\Big|\; \cos(x+y) \;=\; \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

La parité des fonctions trigonométriques nous permet d'écrire

$$\sin(x-y) \;=\; \sin x \cos y - \cos x \sin y \;\Big|\; \cos(x-y) \;=\; \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

*Pour $x = y$, ces relations s'appellent **formules de duplication** :*

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; 2\cos^2 x - 1 \;=\; 1 - 2\sin^2 x.
\end{aligned}$$

En additionnant les formules d'addition on obtient les formules de produit :

Proposition (Formules de produit)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\
\sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)).
\end{aligned}$$

Les formules d'addition et de duplication doivent être connues PAR COEUR - et ce même si les secondes découlent des premières. En revanche, vous devez juste savoir retrouver vite et bien les formules de produit, si possible de tête.

Fonction Tangente

Finissons ce rappel des fonctions trigonométriques avec un étude de la fonction tangente. Pour cela définissons

$$\begin{aligned} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; + \; \pi\mathbb{Z} &= \left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; \forall k \in \mathbb{Z}, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \cdots, -\frac{\pi}{2} - 2\pi, -\frac{\pi}{2} - \pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Définition (Tangente)

*On appelle fonction **tangente** la fonction définie sur*

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\; + \; \pi\mathbb{Z}$$

par la relation

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Fonction Tangente

Donnons quelques propriétés de la fonction tangente.

Proposition (Propriétés)

- ***Résolution d'équations :*** *pour tous* $x, y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ + \ \pi\mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \ [\pi].$$

En particulier, la fonction $\tan$ *est* π*-périodique.*

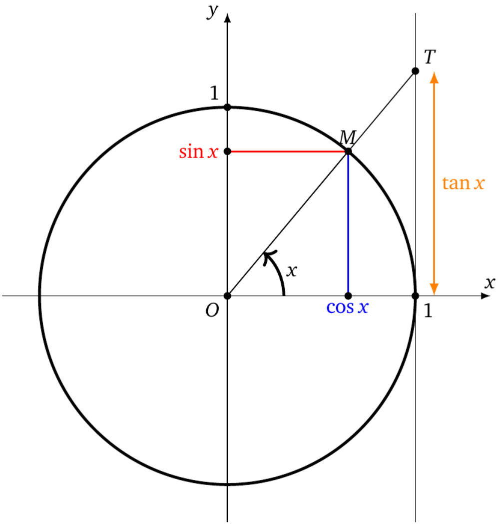
- *La fonction* $\tan$ *est* ***impaire*** *:*

$$\tan(-x) \quad = \quad -\tan x.$$

- ***Formules d'addition et de duplication :***

$$\begin{aligned} \tan(x+y) \quad &= \quad \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(x-y) \quad &= \quad \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \\ \tan 2x \quad &= \quad \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}. \end{aligned}$$

Fonction Tangente



Valeurs remarquables du sinus, du cosinus et de la tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Chapitre 1 - Nombres réels continuation

On connait très bien maintenant l'ensemble des réels, nous avons étudié :

- ses sous-ensembles les plus importantes.
- l'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}$.
- la relation d'ordre $\leq$ et ses propriétés.
- la valeur absolue et quelques fonctions importantes.

Vous savez donc presque tout sur les réels $-$ mais pas tout. Alors que vous manipulez des inégalités depuis assez longtemps, il y a tout de même une propriété de la relation

$$\leq \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

que vous ne connaissez pas :

$-$ **dite propriété de la borne supérieure** $-$

et qui revêt une importance fondamentale. Cette section vise principalement à motiver et vous présenter cette propriété.

Majorant et Minorant

Commençons par donner quelques définitions.

Définition (Majorant-Minorant)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- *A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ nous avons*
$$x \leq M.$$
*On dit alors que M est un **majorant** de A.*
- *A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ nous avons*
$$x \geq m.$$
*On dit alors que m est un **minorant** de A.*
- *A est **bornée** lorsque A est à la fois majorée et minorée. C'est-à-dire, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$ nous avons*
$$m \leq x \leq M.$$

Majorant et Minorant

Remarques :

- On ne parle jamais « **du** » majorant d'une partie majorée de $\mathbb{R}$ mais bien toujours d'**UN** majorant car une telle partie en possède toujours plein. En effet, si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$ et si M est un majorant de A, alors tout nombre supérieur ou égal à M est aussi un majorant de A. Par conséquent, si une partie de $\mathbb{R}$ admet au moins un majorant, alors elle en admet une infinité. Tout réel supérieur ou égal à un majorant est lui-même un majorant. Même chose à dire sur les minorants.

- La partie A est bornée si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in A, |x| \leq m.$$

Exemples :

- L'ensemble $A = \{-10, 4, 24, 2500\}$ est majoré par tout réel supérieur ou égale à 2500. A est minoré par tout réel inférieur ou égale à -10. L'ensemble A est donc borné.
- L'ensemble $A = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ est majoré et le nombre 1 en est un majorant.
- Les intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b]$ ont les mêmes majorants et les même minorants.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ est minorée par 0 (et tout réel inférieur à 0), mais il n'est pas majorée.
- L'intervalle $[3, +\infty[$ est minoré par 3, MAIS AUSSI par $2,\ e,\ 0, -1,$ $-10, -100, \cdots$. Il n'est pas majoré en revanche.
- Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorées, ni minorées.

Maximum et Minimum

Un majorant ou minorant de une partie A de $\mathbb{R}$, n'appartient pas necéssairement à A. Quand il appartient à l'ensemble on dit :

Définition (Maximum-Minimum)

- ***Plus grand élément*** *: On appelle* ***plus grand élément*** *de A ou* ***maximum*** *de A tout élément de A qui majore A. C'est-à-dire, tout majorant de A qui est dans A.*
- ***Plus petit élément*** *: On appelle* ***plus petit élément*** *de A ou* ***minimum*** *de A tout élément de A qui minore A. C'est-à-dire, tout minorant de A qui est dans A.*

Exemples :

- Dans l'ensemble $A = \{-10, 4, 24, 2500\}$, 2500 est un maximun et -10 est un minimum.
- Le nombre 0 est un minimum de $\mathbb{N}$.
- Dans l'intervalle $[a, b]$, b est un maximun et a est un minimum.

Maximum et Minimum

Exemple : Montrer que l'intervalle $[a, b[$ admet a pour plus petit élément mais n'a pas de plus grand élément.

Solution : Soit $I = [a, b[$.

- On va tout d'abord montrer que a est un minimum de I. Par définition de $[a, b[$, pour tout $x \in I$, nous avons
$$a \leq x.$$
Ainsi a est un minorant de I. De plus, $a \in I$, donc a est un minimum de I.

- Montrons maintenant que I n'admet pas un plus grand élément. Tout d'abord, b n'est pas un maximum de I car $b \notin I$. Raisonnons en suite par l'absurde et supposons que b' est un maximum de I. Alors pour tout $x \in I$, nous avons
$$x \leq b' \quad (\text{car } b' \text{ est un majorant de } I).$$
Posons
$$b'' = \frac{b + b'}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{b + b'}{2} \in I. \quad (\text{car } a < b' < b \text{ et donc } a < b'' < b)$$
De plus $b' < b''$, donc b' n'est pas un majorant de I. **Contradiction !** Par conséquent, I ne possede pas de plus grand élémént.

Maximum et Minimum

Des exemples précédents on peut déduire le résultat suivant.

Théorème (Unicité)

*Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, celui-ci est **UNIQUE**. On peut donc l'appeler **LE** plus grand (resp. petit) élément de A et le noter*

$$\max A \quad (\textit{resp.} \quad \min A).$$

Démonstration.

Soit $M,\ M' \in \mathbb{R}$. Si M et M' sont deux plus grands éléments de A, alors

$$M' \leq M$$

car M majore A et $M' \in A$, et de même

$$M \leq M'$$

car M' majore A et $M \in A$. Par conséquent

$$M' \leq M \quad et \quad M \leq M' \qquad \Longrightarrow \quad M = M'.$$

Ainsi le maximum est unique. Même preuve permet de conclure que le plus petit élément est unique aussi. □

Attention : On ne peut écrire $\max A$ que si on a déjà démontré que A admet un plus grand élément, ou si on se trouve dans un contexte où l'existence du plus grand élément ne fait pas de doute.

Au contraire, si A est une partie donnée de $\mathbb{R}$, il n'y a aucune raison de penser qu'elle a un plus grand élément si on n'a pas d'information supplémentaire : c'est une erreur grave de parler de $\max A$ (ou de s'en servir dans des exercices) si on n'a pas déjà étudié l'existence d'un plus grand élément pour A ou si cette existence n'est pas évidente d'après le contexte.

Maximum et Minimum

Le résultat suivant nous donne une caractérisation des ensemble de $\mathbb{N}$ possédant un plus petit élément ou un plus grand élément.

Théorème

- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément (minimum).*
- *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément (maximum).*

Démonstration.

Voir le cours d'algèbre. $\square$

Remarque : Comme vous avez vu dans le cours d'algèbre, cette propriété est la base du **Raisonnement par Récurrence**.

Remarque : Dans le cas de $\mathbb{Z}$ nous avons :

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un maximum.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un minimum.

Borne supérieure - Borne inférieure

Nous avons vu que l'intervalle

$$[a, b[$$

n'a pas de plus grand élément, pourtant sa borne b est quelque chose de cet ordre — mais quoi ? Comment décrire conceptuellement ce réel qui n'est pas dans $[a, b[$ mais qui n'est pas n'importe qui pour $[a, b[$?

Ce qui rend le majorant b si particulier pour $[a, b[$, c'est qu'il est le meilleur majorant qu'on pouvait espérer :

LE PLUS PETIT POSSIBLE.

Nous allons donc le donner un nom au plus petit majorant (et au plus grand minorant).

Définition (Borne supérieure/inférieure)

- ***Borne supérieure :* S'il existe**, *le plus petit majorant de A est appelé* ***la*** *borne supérieure de A et noté*

$$\sup(A).$$

- ***Borne inférieure :* S'il existe**, *le plus grand minorant de A est appelé* ***la*** *borne inférieure de A et noté*

$$\inf(A).$$

Borne supérieure - Borne inférieure

Exemple : Les intervalles $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $]a, b]$ ont a pour borne inférieur et b pour borne supérieur.

Montrons proprement que $[a, b[$ admet b pour borne supérieure.

Solution : Pour commencer, b est un majorant de $[a, b[$. Nous devons donc montrer que b est le plus petit majorant de $[a, b[$, c'est-à-dire, montrer que tout réel strictement inférieur à b ne majore pas l'intervalle. Soit $x < b$ un tel réel.

- Si $x < a$, alors clairement x ne majore pas $[a, b[$ car $x < a$.
- Si $x > a$, posons
$$x' = \frac{x+b}{2}.$$
Alors $x' \in [a, b[$ et $x < x'$, donc x ne majore pas $[a, b[$.

Ainsi, b est le plus petit majorant de $[a, b[$. En résumé, $[a, b[$ possède une borne supérieure, mais **PAS** de plus grand élément.

Borne supérieure - Borne inférieure

La différence essentielle entre plus grand élément et borne supérieure, c'est que la borne supérieure, quand elle existe, n'appartient pas forcement à la ensemble consideré. Inversement, nous avons le résultat suivant.

Théorème (Lien entre les notions de plus grand/petit élément et borne supérieure/inférieure)

Si A possède un plus grand (resp. petit) élément, alors A possède une borne supérieure (resp. inférieure) et :

$$\sup(A) = \max(A) \quad (resp.\ \inf(A) = \min(A)).$$

Démonstration.

Supposons que A possède un plus grand élément et montrons que $\max A$ est la borné supérieur de A. Nous avons deux choses à vérifier :

1. que : $\max A$ est un majorant de A, or par définition $\max A$ majore A,
2. que : $\max A$ est le plus petit de majorants, or par définition $\max A \in A$, donc $\max A \leq M$ pour tout majorant M de A.

Puisque $\max A$ vérifie les deux points précédents, on conclut $\sup A = \max A$. $\square$

En conclusion, nous avons :

Proposition

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :

- *A admet un plus grand élément ;*
- $\sup(A) \in A$.

De même, si A est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Alors il y a équivalence entre :

- *A admet un plus petit élément ;*
- $\inf(A) \in A$.

Borne supérieure - Borne inférieure

On a deja donné quelques exemples de parties de $\mathbb{R}$ possèdant une borne supérieure. On voudrais aller plus loin et déterminer toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui possèdent une borne supérieure. Le théorème suivant nous donne la réponse.

Propriété (Propriété de la borne supérieure/inférieure)

- *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*
- *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Borne supérieure - borne inférieure

La caractérisation suivante de la borne supérieur et inférieur va se montrer très utile dans la suite.

Propriété (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
M = \sup(A) \quad & \iff \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A,\ M \leq M'. \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \\ \text{pour tout } b < M,\ b \text{ n'est pas un majorant de } A. \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } y < M,\ \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y < x. \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } M - \epsilon < x. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Borne supérieure - borne inférieure

Propriété (Caractérisation de la borne inférieure)

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
m = \inf(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A, \\ \text{pour tout } m' \text{ minorant de } A,\ m' \leq m. \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A, \\ \text{pour tout } a > m,\ \text{a n'est pas un minorant de } A. \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{pour tout } y > m,\ \text{il existe } x \in A \text{ tel que } y > x. \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{pour tout } \epsilon > 0,\ \exists x \in A \text{ tel que } x < m + \epsilon. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exemple Nous avons

	$\min(A)$	$\inf(A)$	$\max(A)$	$\sup(A)$
$A = \{1\}$	1	1	1	1
$A = \{2,4\}$	2	2	4	4
$A =]1,5[$	$\times$	1	$\times$	5
$A = [-5,0[$	-5	-5	$\times$	0
$A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$	$\times$	0	1	1
$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$	$\times$	$-\sqrt{2}$	$\times$	$\sqrt{2}$
$A = [2,4[\cap \mathbb{Q}$	2	2	$\times$	4

Exemple : Trouvons le $\max$, $\min$, $\inf$ et $\sup$ dans le cas de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Solution : On commence par noter que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ainsi 1 est un majorant de A. De plus

$$1 = \frac{1}{1} \quad \Longrightarrow \quad 1 \in A \quad \Longrightarrow \quad \max A = 1.$$

Comme A possède 1 comme plus grand élémént, on conclut

$$1 = \sup A.$$

Maintenant, pour tout $0 < n < m$ nous avons

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

L'ensemble A ne possède donc pas un plus petit élément.

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \frac{1}{n}$$

Ainsi, 0 est un minorant de A, montrons que 0 est la borne inférieure de A. D'après la propriété dite de, **caractérisation de la borne inférieure**, il ne nous reste qu'à vérifier que

$$\text{pour tout } y > 0, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } x < y.$$

Pour montrer cela, notons que comme l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas bornée, pour tout $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\frac{1}{y} < n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} < y.$$

Par conséquent, 0 satisfait les deux propriétés caractérisant la borne inférieur, d'où on conclut

$$\inf A = 0.$$

Autre Méthode : Par définition de la borne inférieure, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{n} \geq \inf(A).$$

Donc par passage à la limite (la limite preserve les inégalités), on obtient

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ \geq \ \lim_{n \to +\infty} \inf(A) = \inf(A).$$

Or 0 est un minorant de A, donc $0 \leq \inf(A)$. Par conséquent

$$\inf(A) = 0.$$

Borne supérieure - Borne inférieure

Théorème (Opérations sur les bornes supérieures)

On suppose que A et B possèdent chacune une borne supérieure.

- *Si : $A \subset B$, alors*
$$\sup(A) \leq \sup(B).$$
- *L'ensemble $A \cup B$ possède une borne supérieure et*
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}.$$
- *L'ensemble $A + B = \{a + b : a \in A$ et $b \in B\}$ possède une borne supérieure et*
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$
- *Pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble*
$$\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}.$$
possède une borne supérieur et $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup A$.

Propriété d'Archimède

Continuons avec notre étude de l'ensemble des nombres réels. La dernière propriété de l'ensemble des nombres réels que nous allons étudier est la propriété dite d'Archimède :

Proposition (Propriété d'Archimède)

Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$n \leq x < n + 1.$$

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$, et considérons l'ensemble

$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}.$$

Alors B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$. On sait alors qu'elle possède un plus grand élément n. D'après la définition du maximum, on conclut :

$$\begin{aligned} n \in B \quad &\Longrightarrow \quad n \leq x \\ n + 1 \notin B \quad &\Longrightarrow \quad x < n + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $n \leq x < n + 1$. $\square$

Unicité de n.

Montrons à présent l'unicité : supposons n_1, n_2 tels que :

$$n_1 \leq x < n_1 + 1 \quad \text{et} \quad n_2 \leq x < n_2 + 1.$$

Alors $-n_2 - 1 < -x \leq -n_2$ et par somme on obtient

$$n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1.$$

Ainsi

$$-1 < n_1 - n_2 < 1.$$

Puisque $n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $n_1 - n_2 = 0$. C'est-à-dire

$$n_1 = n_2.$$

$\square$

Partie entière

La propriété d'Archimède peut sembler évidente, elle est pourtant essentielle, elle nous permet par exemple de définir la partie entière d'un nombre réel.

Définition (partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'unique entier n vérifiant

$$n \leq x < n+1,$$

*s'appelle la **partie entière** de x et est noté*

$$E(x) \quad \textit{ou} \quad \lfloor x \rfloor.$$

Remarque : La partie entière de x est donc le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple :

- $E(2.853) = 2$, $E(-1.53) = -2$, $E(-3) = -3$ et $E(5) = 5$.
- $$E(x) = 3 \iff 3 \leq x < 4.$$

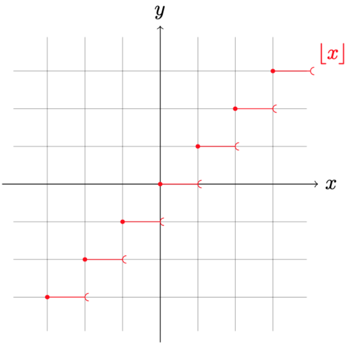


FIGURE – La fonction partie entière.

Densité

Finissons ce chapitre en introduisant la notion de densité.

Définition (Partie dense dans $\mathbb{R}$)

*On dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec : $x < y$, il existe $a \in A$ tel que*

$$x < a < y.$$

Autrement dit, si l'intervalle $]x, y[$ contient un élément de A.

Nous avons l'exemple suivant.

Théorème (Densité des rationnels et des irrationnels)

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Il y a ainsi toujours un rationnel entre deux irrationnels distincts et un irrationnel entre deux rationnels distincts. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont imbriqués l'un dans l'autre.

Densité

Donnons une idée de la preuve de la densité de $\mathbb{Q}$, pour cela on introduit la notion d'approximation décimal.

Définition (Approximations décimales)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$$

est l'unique entier tel que :

$$p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}.$$

Le nombre décimal $\frac{p_n}{10^n}$ est appelé ***approximation décimale par défaut*** *de x à la précision 10^{-n}. Le nombre $\frac{p_n+1}{10^n}$ est appelé* ***approximation décimale par excès*** *de x à la précision 10^{-n}.*

Exemple

$1.1414 \leq \sqrt{2} < 1.1415$ *à* 10^{-4} *près,* $3.1415 \leq \pi < 3.1416$ *à* 10^{-4} *près.*

Densité

<u>**Idée de preuve**</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$u_n = \frac{p_n + 1}{10^n}$$

l'approximation décimale par excès de x. On a alors

$$0 \leq u_n - x \leq 10^{-n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite, on obtient (la limite preśerve les inégalités) que

$$\lim_n u_n = x.$$

On a ainsi obtenu une suite $(u_n)_n$ de nombres rationnel qui tend vers $x \in \mathbb{R}$. En particulier, pour tout $y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$x < u_n < y.$$

Ce qui montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Densité

Proposition (Caractérisation de la densité en termes de voisinages)

Soit U une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. *U est dense dans $\mathbb{R}$,*

ii. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists u \in U$ *tel que*

$$|u - x| < \epsilon.$$

Remarque :Ainsi, dire que U est dense dans $\mathbb{R}$, c'est dire que tout point de la droite réelle peut être

« approché d'aussi près qu'on veut »

par des éléments de U.

Chapitre 2 - Suites numériques

Suites numériques :

- Généralités :
  - Définition.
  - Propriétés.
  - Opérations sur les suites.
- Limites de suites :
  - Définition.
  - Opérations sur les limite.
  - Théorèmes d'existence de limite.
- Suites adjacentes et récurrentes.
- Extension aux suites complexes.

Définition (Suite réelle)

*Une **suite réelle** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter

$$u_n \quad \text{le réel} \quad u(n)$$

*et on l'appele le n-**ième terme de la suite** ou **terme général de la suite**.*

La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$, ou simplement (u_n).

Remarque : On prendra garde à bien distinguer la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ avec son n-ième terme u_n.

Suites numériques

Une suite peut être définie de trois manières différentes :

- par une formule **explicite** : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n, soit $u_n = f(n)$. Par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$

- par une formule de **récurrence** : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents : $u_{n-1}, \ldots, u_0$. Par exemple

$u_0 = 1$ et $\forall n > 0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ (relation de récurrence d'ordre 1)

nous pouvons donner aussi comme exemple

$v_0 = 1, v_1 = 1,$ et $\forall n > 1,\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ (relation de récurrence d'odre 2)

- par une formule **implicite** : le terme général u_n de la suite est solution d'une équation dépendant de n. Par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \text{ est l'unique solution réel de l'équation } x^3 + x - 1 = n.$$

Sur les suites on peut définir les opérations suivants.

Définition (Opérations sur les suites)

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

- *La* ***somme*** *de* u *et* v *est la suite notée* $(u+v)$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)_n \;=\; u_n + v_n.$$

- *Le* ***produit*** *de* u *et* v *est la suite notée* $(u \cdot v)$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \cdot v)_n \;=\; u_n \cdot v_n.$$

- *Le* ***produit de*** u ***par un scalaire*** $\lambda \in \mathbb{R}$ *est la suite notée* $\lambda \cdot u$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda \cdot u)_n \;=\; \lambda \cdot u_n.$$

Suites réelles et relation d'ordre

Étudions quelques propriétés éventuelles des suites numériques.

Définition (suite majorée, minorée, bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réele.*

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***majorée****, s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M.$$

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***minorée****, s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n.$$

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***bornée****, si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire, s'il existe* $m \in \mathbb{R},\ M \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M.$$

Ce qui peut aussi être dite par

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| \leq M.$$

Suites réelles et relation d'ordre

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réele.*

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***croissante*** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}.$$
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement croissante*** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***décroissante*** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}.$$
- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***strictement décroissante*** *si*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}.$$

Suites réelles et relation d'ordre

Définition

- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.*
- *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.*

Remarque : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux méthodes courantes :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Ainsi

$$\begin{array}{lcl} \text{si } \; u_{n+1} - u_n \geq 0 & \Longrightarrow & (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{si } \; u_{n+1} - u_n \leq 0 & \Longrightarrow & (u_n) \text{ est décroissante} \end{array}$$

- si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, étudier la position de de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Ainsi

$$\begin{array}{lcl} \text{si } \; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 & \Longrightarrow & (u_n) \text{ est croissante} \\ \text{si } \; \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 & \Longrightarrow & (u_n) \text{ est décroissante} \end{array}$$

  Cette méthode est intéressante surtout lorsque u_n est défini par des produits et des quotients et qu'on peut espérer des simplifications.

Exemple : Étudions la monotonie de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Solution : Nous avons $u_n > 0$. Pour décrire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il suffit donc d'étudier la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Or

$$\frac{n}{n+1} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Finalement, introduisons.

Définition (suites constantes)

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***constante*** *si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0.$$

Propriétés à partir d'un certain rang

Ce qu'une suite a d'intéressant pour nous dans ce chapitre, ce ne sont pas ses premiers termes mais son comportement asymptotique, c'est-à-dire son comportement à l'infini. Si par exemple tous ses termes sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de dire que la suite est

« **presque** » majorée par 1.

On dit qu'elle est majorée par 1 **à partir d'un certain rang.**

Ce qui nous amène à définir.

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait la propriété* $\mathcal{P}(n)$ *à partir d'un certain rang s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \quad \textit{est vraie.}$$

Par exemple on dit :

Définition (suite stationnaire)

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite ***stationnaire*** *si elle est constante à partir d'un certain rang i.e si*

$$\exists n_0 : \ \forall n \geq n_0, \ u_n = u_{n_0}.$$

Exemple : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \prod_{k=0}^{n} (100 - k).$$

Alors pour tout $n \geq 100$ nous avons

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n} (100 - k) &= 100 \cdot (100 - 1) \cdots (100 - 99) \cdot (100 - 100) \cdots (100 - n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, constante égale à 0 à partir du rang $n = 100$.

Limite d'une suite réelle

Nous allons nous intereser maintenant à l'une des notions le plus importantes en mathématiques, la notion de **convergence de une suite** ou **limite de une suite**.

Définition Provisoire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** le réel $\ell \in \mathbb{R}$

si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est proche d'aussi près que l'on veux de ℓ pour n suffisamment grand (i.e. à partir d'un certain rang).

Exemple : Avec cette définition, étudions le cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = 3 + \frac{1}{n}.$$

Vraisemblablement

quand n tend vers l'infini, la suite u_n tend vers 3

Selon notre définition provisoire, pour montrer la convergence de la suite vers 3, on doit vérifier que u_n est proche d'aussi près que l'on veux de 3 à partir d'un certain rang.

Par exemple, supposons qu'on veut que u_n soit à une distance de $\frac{1}{10}$ de 3. Pour cela, on doit avoir

$$3 - \frac{1}{10} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{10},$$

ce qui est équivalent à

$$|u_n \ - \ 3| \leq \frac{1}{10}.$$

Et cette dernière inégalité est vraie, si et seulement si

$$\left|3 + \frac{1}{n} \ - \ 3\right| \leq \frac{1}{10} \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10} \iff 10 \leq n.$$

Notons qu'il n'a rien de spécial sur $\frac{1}{10}$, si l'on veut que

$$|u_n - 3| \leq \epsilon \quad \text{pour } \epsilon \text{ un réel positif,}$$

il suffit que

$$n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Ainsi, on vient de démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est proche d'aussi près que l'on veux de 3 pour n suffisamment grand.

Limite d'une suite réelle

Formalisons notre définition provisoire de limite, on commence par faire plus précise la notion :

« d'être proche de »

Dans notre exemple, nous avons vu que pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit proche de 3, il faut que la distance

$$|u_n - 3| \quad \text{soit petit.}$$

Ainsi, le premier changement qu'on va faire à notre définition provisoire est :

Définition Provisoire 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{a pour } \textbf{limite} \text{ le réel } \ell \in \mathbb{R}$$

si $|u_n - \ell|$ est aussi petit que l'on veut pour n suffisamment grand (i.e. à partir d'un certain rang).

Limite d'une suite réelle

Maintenant, dans notre exemple nous avons vu que, pour que

$$|u_n - 3| \ \textbf{soit aussi petit que l'on veut},$$

pour tout $\epsilon > 0$, on doit avoir

$$|u_n - 3| \leq \epsilon \qquad \text{a partir d'un certain rang.}$$

Le deuxième changement qu'on va faire à notre définition provisoire est donc :

Définition Provisoire 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ a pour } \textbf{limite} \text{ le réel } \ell \in \mathbb{R}$$

si pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$|u_n - \ell| \leq \epsilon$$

pour n suffisamment grand (i.e. à partir d'un certain rang).

Il ne nous reste donc qu'a faire plus précise la phrase :

« pour n suffisamment grand »

Dans notre exemple, nous avons vu que

$$|u_n - 3| \leq \frac{1}{10} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq 10.$$

Ainsi, la propriété est vraie à partir de $N = 10$. De même, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$|u_n - 3| \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier

$$N \in \mathbb{N}, \quad \text{il suffit de prendre } N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1,$$

pour que pour tout $n > N$ la propriété est vraie.

Limite d'une suite réelle

On est à présent prêt pour donner la définition de la limite d'une suite.

Définition (Limite d'une suite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{\textit{converge}} \textit{ vers un réel } \ell \in \mathbb{R}$$

ou que

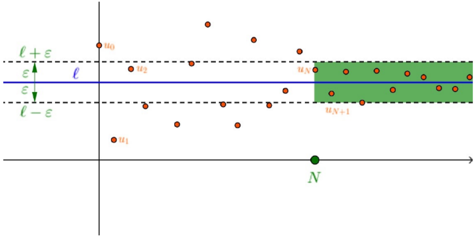
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{a pour } \textbf{\textit{limite}} \ \ell$$

si : pour tout $\epsilon > 0$ existe un entier $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$ alors

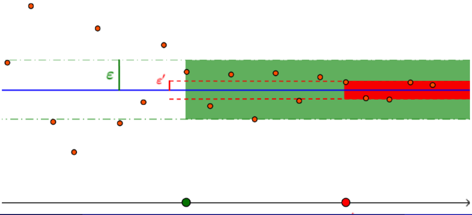
$$|u_n - l| \leq \epsilon.$$

Ce que on peut exprimer à l'aide de quantificateurs par

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ (n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon) \, .$$



On constate que le rang en question dépend en général de ϵ : de manière vague, on peut penser que typiquement, « plus ϵ est petit, plus il faudra attendre un grand rang N avant de voir la distance entre u_n et ℓ rester systématiquement $< \epsilon$ ».



Remarque :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on pourra aussi dire que :

  la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** ℓ,

  et on note

  $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell,$$

  ou

  $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- Noter que dans la phrase logique

  $$\forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)\,.$$

  N dépend de ϵ et qu'on **ne peut pas échanger l'ordre** du « **pour tout** » et du « **il existe** ».

- D'après la définition de la limite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si

  $$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n \;=\; 3 + \frac{1}{n}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

Solution : Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 3| \leq \epsilon.$$

C'est-à-dire, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad -\epsilon \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon \quad &\iff \quad \forall n \geq N, \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon \\ &\iff \quad \forall n \geq N, \quad \frac{1}{\epsilon} \leq n. \end{aligned}$$

Posons $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1$, alors pour $n \geq N$, nous avons

$$n \geq N > \frac{1}{\epsilon} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |u_n - 3| \leq \epsilon.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Limite d'une suite réelle

Si elle existe, on va pouvoir parler de **la** limite, car il y a unicité :

Proposition (Unicité de la limite)

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_2 \;\text{ avec }\; \ell_1 \neq \ell_2.$$

Soit $\epsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} > 0$. Par définition de la limite, on a

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \;\text{ tel que }\; \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leq \epsilon/2$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \;\text{ tel que }\; \forall n \geq N_2, \quad |u_n - \ell_2| \leq \epsilon/2$$

□

Démonstration.

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$|u_n - \ell_1| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad |u_n - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |(\ell_1 - u_n) + (u_n - \ell_2)| \\ &\leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}. \end{aligned}$$

Contradiction ! Donc $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Limite d'une suite réelle

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $+\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies u_n \geq A).$$

- *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies u_n \leq A).$$

Remarque :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\pm\infty$, on note

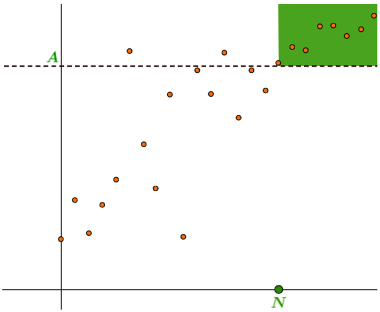
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty.$$

- Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty.$$

Remarque : Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, c'est dire que

« Pour tout $A > 0$, même arbitrairement grand, on aura $u_n > A$ à partir d'un certain rang. »



Remarque : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un nombre réel. En niant la définition, l'affirmation « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ » s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \ \text{ et } \ |u_n - \ell| \geq \epsilon.$$

Pour dire qu'une suite **n'admet pas de limite finie**, on doit verifier qu'elle ne converge vers aucun réel : ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, l'affirmation « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente » s'écrit avec des quantificateurs :

$$\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \ \text{ et } \ |u_n - \ell| \geq \epsilon.$$

Définition (Convergence - Divergence)

- *Une suite est dite **convergente** si elle admet une limite **finie**.*
- *Elle est **divergente** sinon. C'est-à-dire, une suite est divergente si elle n'admet pas de limite finie. En particulier, une suite est divergente si elle tend vers $\pm\infty$.*

Limite d'une suite réelle

Nous avons donc :

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	**Divergence**	**Divergence**

Exemples :

- La suite de terme général $\frac{n\sin(n)}{n^2+4}$ est convergente, sa limite est 0.
- La suite de terme général $n^2 + (-1)^n n$ est divergente, elle tend vers $+\infty$.
- La suite de terme général $(-1)^n$ est divergente, elle n'admet pas de limite.

Limite d'une suite réelle

Études quelques propriétés des suites convergentes.

Proposition

Toute suite réelle convergente est bornée.

Démonstration.

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\epsilon = 1 > 0$, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq 1.$$

Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$\begin{aligned} |u_n| = |u_n - \ell + \ell| &\leq |u_n - \ell| + |\ell| \\ &\leq |\ell| + 1 < +\infty. \end{aligned}$$

Posons alors

$$M = \max(|u_0|, \ldots, |u_N|, 1 + |\ell|).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $|u_n| \leq M$. □

Remarques :

- La réciproque est fausse, la suite de terme général

$$(-1)^n + 4$$

  est bornée entre 3 et 5 sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas forcément $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite. La suite de terme général

$$(-1)^n n^3 + 1,$$

  n'est pas bornée et n'a pas de limite.

Limite d'une suite réelle

Le lemme suivant peut se montrer utile pour vérifier la valeur d'une limite.

Lemme

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et soit* $\ell \in \mathbb{R}$*. Supposons* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle positive tendant vers 0 telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente de limite* $\lim u_n = \ell$*.*

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |\alpha_n| \leq \epsilon.$$

De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |u_n - \ell| \leq \alpha_n.$$

Posons, $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$, on a : $|u_n - \ell| \leq \alpha_n \leq \epsilon$. Ainsi, (u_n) converge vers ℓ. □

Remarque : Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on peut tenter de majorer

$$|u_n - \ell|$$

par une suite qui converge vers 0.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|.$$

Démonstration.

Voir T.D. □

Opérations sur les limites

Nous avons vu que sur l'ensemble des suites on peut définir une addition et un produit. Étudions le comportement de la convergence par rapport a ces deux opérations.

Proposition (Cas de deux limites finies)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

- ***Somme :*** *Nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n \;=\; \ell + \ell'.$$

- ***Produit :*** *Nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n \;=\; \ell \cdot \ell'.$$

- ***Multiplication par un réel :*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda \cdot u_n \;=\; \lambda \cdot \ell.$$

Remarque : Si on combine les points un et trois du résultat précédent, on a

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda u_n \;+\; \mu v_n \;=\; \lambda\ell + \mu\ell'.$$

Opérations sur les limites

Démonstration.

- **Somme :** Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'.$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq \epsilon.$$

Maintenant, par définition de la limite

$$\begin{aligned} &\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon/2 \\ &\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \epsilon/2 \end{aligned}$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n > N$, on peut, à l'aide de l'inégalité triangulaire, conclure

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Par conséquent, $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$. $\square$

Démonstration.

- **Produit :** Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'.$$

Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq \epsilon.$$

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut, à l'aide de l'inégalité triangulaire, conclure

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'| &= |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \\ &\leq |(u_n - \ell)v_n| + |\ell(v_n - \ell')| \\ &\leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| \end{aligned}$$

Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K. C'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq K.$$

□

Opérations sur les limites

Démonstration.

De plus, par définition de la limite

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2K}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \frac{\epsilon}{2(1+|\ell|)}$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n > N$, nous avons

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| &\leq |u_n - \ell| \cdot |v_n| + |\ell| \cdot |v_n - \ell'| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2K} \cdot K \; + \; |\ell| \cdot \frac{\epsilon}{2(1+|\ell|)} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \cdot \ell$. □

Opérations sur les limites

Proposition (Cas des limites infinies)

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui tend vers* $+\infty$.

- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite **minorée**, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n \;=\; +\infty.$$

En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite **minorée** par un réel **strictement positif** à partir d'un certain rang, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n \;=\; +\infty.$$

En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \cdot v_n = +\infty$.

Remarque : On a de résultats similaires quand on suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ comme on verra dans un instant.

Opérations sur les limites

Proposition (Cas du quotient)

- *Si* (u_n) *converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *et* (v_n) *converge vers* $\ell' \in \mathbb{R}^*$*, alors la suite* $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie à partir d'un certain rang et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

- *Si* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$*, alors la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie à partir d'un certain rang et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0.$$

- *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *et est* ***strictement positif*** *(resp.* ***strictement négatif****) à partir d'un certain rang, alors la suite* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie à partir d'un certain rang et*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \quad \left(\textit{resp. } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty\right).$$

Opérations sur les limites

Démonstration.

Montrons le première point de la proposition précédente. Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leq \epsilon.$$

Maintenant, comme $v_n \longrightarrow \ell' \neq 0$, on conclut $|v_n| \longrightarrow |\ell'| > 0$. Ainsi, il existe $N_0 > 0$, tel que pour tout $n > N_0$, nous avons $|v_n| > m$. Alors pour tout $n > N_0$, on peut, à l'aide de l'inégalité triangulaire, conclure

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \left|\frac{u_n\ell' - v_n\ell}{v_n\ell'}\right| = \left|\frac{u_n\ell' - \ell\ell' + \ell\ell' - v_n\ell}{v_n\ell'}\right| \quad &= \quad \left|\frac{(u_n - \ell)\ell' - \ell(v_n - \ell')}{v_n\ell'}\right| \\
&\leq \quad \left|\frac{(u_n - \ell)\ell'}{v_n\ell'}\right| + \left|\frac{\ell(v_n - \ell')}{v_n\ell'}\right| \\
&= \quad \frac{|u_n - \ell|}{|v_n|} + \frac{|\ell| \cdot |(v_n - \ell')|}{|v_n| \cdot |\ell'|} \\
&\leq \quad \frac{|u_n - \ell|}{m} + \frac{|\ell| \cdot |(v_n - \ell')|}{m \cdot |\ell'|}
\end{aligned}$$

□

Démonstration.

Or par définition de la limite

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon \cdot m}{2}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \frac{\epsilon \cdot m \cdot |\ell'|}{2(1+|\ell|)}$$

Posons $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n > N$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{\ell}{\ell'}\right| &\leq \frac{|u_n - \ell|}{m} + \frac{|\ell| \cdot |(v_n - \ell')|}{m \cdot |\ell'|} \\ &\leq \frac{\epsilon \cdot m}{2m} + \frac{\epsilon \cdot m \cdot |\ell| \cdot |\ell'|}{2m \cdot (1+|\ell|) \cdot |\ell'|} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$. $\square$

Opérations sur les limites

On déduit des propositions précédentes les tableaux suivants :

Limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Limite de $(u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n)$	$\ell \cdot \ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Opérations sur les limites

Limite de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

	$\lambda > 0$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	$\ell \neq 0$	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	$\ell \neq 0$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

Limite de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

			$u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$u_n < 0$ à partir d'un certain rang	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Remarque : Forme indéterminée, signifie que c'est une forme à déterminer. C'est-à-dire, en effectuant une opération $(+\infty) - (+\infty)$ ou $0 \times (+\infty)$, on peut tomber a priori sur **n'importe quel résultat**.

Exemples :

Cas de la forme indéterminée $(+\infty) - (+\infty)$:

- Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty \ ,$$

  mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (3n^2+1) - 3n^2 = 1.$

- Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + 1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty \ ,$$

  mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (3n^2+1) - 2n^2 = +\infty.$

- Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 + (-1)^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty \ ,$$

  mais $(3n^2 + (-1)^n) - 3n^2 = (-1)^n$ n'as pas de limite.

Exemples :

Cas de la forme indéterminée $0 \times +\infty$:

- Nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 4n^2 \;=\; +\infty \;,$$

mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot 4n^2 = 4.$

- Nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} 4n^2 \;=\; +\infty \;,$$

mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot 4n^2 = +\infty.$

- Nous avons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} n^2+1 \;=\; +\infty \;,$$

mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cdot (n^2+1) = (-1)^n$ n'as pas de limite.

Opérations sur les limites

La dernière opération sur les limites que nous avons étudier, c'est la composition à gauche par une fonction.

Théorème (Composition à gauche par une fonction)

Soient I un intervalle

$$f : I \to \mathbb{R}$$

une fonction, $\ell \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$, $L \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I. Si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to\ell} f(x) = L,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L.$$

Remarque : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, d'après le théorème précédente nous pouvons conclure

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \ = \ f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right).$$

Passage à la limite dans une inégalité

Étudions le comportement des limites par rapport à la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Passage à la limite dans les inégalités strictes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possedant une limite ℓ, et soient $m, M \in \mathbb{R}$.

- *Si $\ell < M$, alors*
$$u_n < M$$
à partir d'un certain rang.
- *Si $\ell > m$, alors*
$$u_n > m$$
à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Prouvons le première point, le deuxieme point se montre de la même façon. Supposons $\ell < M$.

- Si $\ell = -\infty$, alors par définition de la limite

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, \quad u_n < M.$$

  C'est-à-dire, $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $M - \ell > 0$ on peut, d'après la définition de la limite, conclure

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n > N, \quad |u_n - \ell| < M - \ell$$

  Ainsi

$$\forall n > N, \quad \ell - M < u_n - \ell < M - \ell \quad \Longrightarrow \quad u_n < M.$$

  C'est-à-dire, $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

$\square$

Passage à la limite dans une inégalité

Théorème (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes vers* ℓ *et* ℓ' *respectivement. Si*

$$u_n \leq v_n$$

à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

C'est-à-dire, $\ell \leq \ell'$.

Remarque : **On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite**. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+1} > 0$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Passage à la limite dans une inégalité

Démonstration.

Par l'absurde. Supposons donc que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n > \lim_{n\to+\infty} v_n \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n > 0.$$

Or la proposition précédent montre que

$$u_n - v_n > 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n > v_n$$

à partir d'un certain rang. **Contradiction !** Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

□

Théorèmes d'existence d'une limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise. Jusqu'à maintenant, nous avons surtout étudié des théorèmes de **CALCUL**, de manipulation des limites. Les quatre théorèmes suivants nous donnent de conditions pour conclure l'existence d'une limite, ils nous fournissent donc pas tant la **VALEUR** d'une limite mais son **EXISTENCE**.

Théorème (Théorème d'encadrement)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites rééls et $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$$

et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, nous avons

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n > N$, nous avons

$$|v_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, nous avons

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Maintenant, par définition de la limite

$$\begin{aligned}
\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad -\epsilon \leq u_n - \ell \leq \epsilon, \\
\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \quad |w_n - \ell| \leq \epsilon \quad &\Longrightarrow \quad -\epsilon \leq w_n - \ell \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Posons $N_3 = \max\{N_1, N_2, N\}$. Ainsi, pour tout $n \geq N_3$, on a

$$-\epsilon \leq u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell \leq \epsilon.$$

Donc $|v_n - \ell| \leq \epsilon$ et on a montré que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Solution : Il suffit de remarquer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, nous avons

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}.$$

Maintenant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Le Théorème d'encadrement permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 1.

Théorèmes d'existence d'une limite

Théorème (Théorème de Minoration/Majoration)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles.*

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, nous avons*
$$u_n \leq v_n,$$
alors
$$\lim v_n = +\infty.$$
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ *et il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, nous avons*
$$u_n \leq v_n,$$
alors
$$\lim u_n = -\infty.$$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution : Notons que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n.$$

Maintenant

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Ainsi

$$\sqrt{n} \leq u_n.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Le Théorème de Majoration nous permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Théorèmes d'existence d'une limite

Notre troisième théorème d'existence est l'important **Théorème de la limite monotone**.

Théorème (Théorème de la limite monotone)

- ***Toute suite réel*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***croissante et majorée est convergent****, et a pour limite :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

  Toute suite réel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***croissante <u>non-majorée</u> diverge vers*** $+\infty$.

- ***Toute suite réel*** (u_n) ***décroissante et minorée converge****, et a pour limite :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

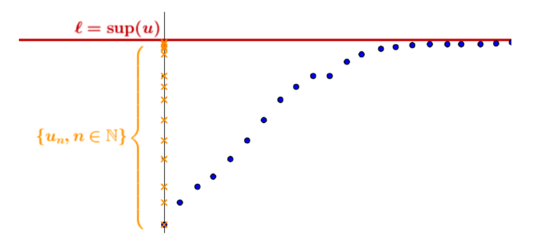
  Toute suite réel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***décroissante et <u>non-minorée</u> diverge vers*** $-\infty$***.***

Démonstration.

Montrons le premier point. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée. L'ensemble

$$A = \{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, donc possède une borne supérieure ℓ **dans** $\mathbb{R}$ d'après la propriété de la borne supérieure.



Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Théorèmes d'existence d'une limite

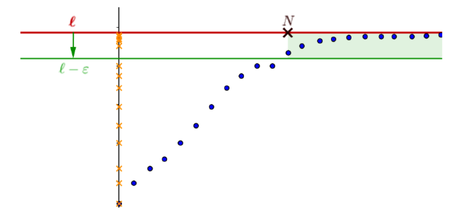
Démonstration.

Soit $\epsilon > 0$, puisque ℓ est la bornée supérieure de A, $\ell - \epsilon$ ne majore pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc

$$u_N > \ell - \epsilon \quad \text{pour un certain} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Or la suite est croissante, alors pour tout $n \geq N$, nous avons

$$\ell - \epsilon < u_N \leq u_n \underbrace{\leq}_{\text{car } \ell \text{ majore } A} \ell \implies \ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon.$$



Ainsi $|u_n - \ell| < \epsilon$ et on a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Démonstration.

Supposons maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée. Soit $M > 0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_N > M.$$

Or, par hypothèse, la suite est croissante, donc pour tout $n \geq N$, on a

$$u_n \geq u_N > M.$$

Nous avons donc montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

$\square$

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution : Comme

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. De plus

$$\begin{aligned} u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée. Par le **Théorème de la limite monotone**, elle converge. (Notons que ça limite est $\frac{\pi^2}{6}$!).

Théorèmes d'existence d'une limite

Notre dérnier théorème d'existence est le **Théorème des suites adjacentes**. Commençons donc par introduire la notion de **suites adjacentes**.

Définition (Suites adjacentes)

*On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si :*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est **croissante** ;*
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est **décroissante** ;*
- $$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n \;=\; 0.$$

Remarque : Deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre.

« Il faut bien qu'elles s'écrasent **QUELQUE PART !** »

nous dit le théorème des suites adjacentes.

Théorème (Théorème des suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites adjacentes, avec*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante } \quad \text{et} \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante.}$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite* ℓ*, c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, nous avons*

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Théorèmes d'existence d'une limite

Démonstration.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante} \quad \text{et} \quad (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante.}$$

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{\leq 0, \text{ car } (v_n) \text{ est décroissante}} - \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0, \text{ car } (u_n) \text{ est croissante}} \leq 0.$$

La suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme, par hypothèse, elle converge vers 0, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$v_n - u_n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad u_n \leq v_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. D'après le **Théorème de la limite monotone**, ces deux suites convergent, disons vers ℓ_1 et ℓ_2. Il ne nous reste qu'à montrer l'égalité $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Démonstration.

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_2$$

Par soustraction sur les limites, on conclut

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ell_2 - \ell_1.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.$$

Ainsi, par unicité de la limite, on obtient $\ell_2 - \ell_1 = 0$, donc

$$\ell_1 = \ell_2.$$

□

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}.$$

Établir que ces suites sont adjacentes.

Solution :

- On a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

  Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- On a aussi

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \left(\frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}\right) = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0.$$

  Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n\cdot n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge clairement vers 0.

Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.

Suites extraites

Définition (Extraction)

Lorsque φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, on dit que φ est une ***extraction****.*

On vérifie par récurrence que toute extraction vérifie la propriété suivant.

Proposition

Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors on a la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n.$$

Suites extraites

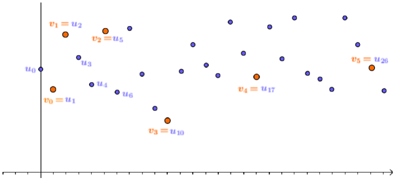
Définition (Suite extraite)

*On appelle **suite extraite** (ou encore **sous-suite**) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme*

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

*où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une **extraction**, c'est-à-dire, une fonction **strictement croissante**.*

Exemple : L'application $\varphi : n \longmapsto n^2 + 1$ est une extraction ; la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite dont les termes sont : u_1, u_2, u_5, u_{10}, u_{17}, etc.



Une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est obtenue en sélectionnant une infinité de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans l'ordre, mais « pas forcément tous ».

Exemples :

- Les suites $\left(\sqrt{5n+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite de terme général $\sqrt{n}$, associées respectivement aux extractions $n \longmapsto 5n+3^n$ et $n \longmapsto n^2$.

- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite de terme général $(-1)^n$, associées respectivement aux extractions $n \longmapsto 2n$ et $n \longmapsto 2n+1$.

- Plus généralement, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appelées suites extraites **paire** et **impaire**.

Suites extraites

Proposition (Limites de suites extraites)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle et* $\ell \in \{\mathbb{R}, +\infty, -\infty\}$.

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, *alors pour toute fonction* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *strictement croissante, nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

  Autrement dit, toute suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente, converge vers la même limite que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$, *alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Démonstration.

Montrons le premier point. Supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N\ |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Or pour tout $n \geq N$, on a

$$\varphi(n) \geq n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.$$

Montrons le cas $\ell = +\infty$ (Même raisonnement dans le cas $\ell = -\infty$). Par définition de la limite, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ u_n \geq M.$$

Or pour tout $n \geq N$, on a

$$\varphi(n) \geq n \geq N \quad \Longrightarrow \quad u_\varphi(n) \geq M \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty.$$

$\square$

Démonstration.

Montrons le point deux. Supposons $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite

$$\begin{aligned}
&\exists N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N_1, \quad |u_{2n} - \ell| \leq \epsilon. \\
&\exists N_2 \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N_2, \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Posons $N = \max\{2N_1,\ 2N_2 + 1\}$, et soit $n \geq N$.

- Si $n = 2k$ est pair avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n = 2k \geq N \geq 2N_1$. Ce qui implique $k \geq N_1$, donc
$$|u_n - \ell| = |u_{2k} - \ell| \leq \epsilon.$$
- Si $n = 2k + 1$ est impair avec $k \in \mathbb{N}$, alors $n = 2k + 1 \geq N \geq 2N_2 + 1$. Ce qui implique $k \geq N_2$, donc
$$|u_n - \ell| = |u_{2k+1} - \ell| \leq \epsilon.$$

Dans le deux cas
$$|u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

$\square$

Suites extraites

Remarque : Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite **n'a pas de limite**. En effet, si on trouve deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne convergent pas vers la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exemples :

- La suite $u_n = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite car

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} \;=\; 1$$

  par contre

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} \;=\; \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} \;=-1.$$

- La suite $v_n = \left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)$ n'a pas de limite car

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi) \;=\; 1$$

  par contre

$$\lim_{n\to+\infty} v_{4n+1} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \;=\; 0.$$

Nous allons nous intéreser à présent aux suites récurrentes définies par :

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

avec f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I.

Remarque : Une telle relation de récurrence ne permet pas toujours de bien définir une suite. Par exemple, il n'existe pas de suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = 2 + \sqrt{1 - u_n}.$$

En effet, comme

$$f(u_0) = f(1) = 2 + \sqrt{1 - 1} = 2,$$

on peut poser $u_1 = 2$. Mais ensuite $f(2)$? La fonction

$$2 + \sqrt{1 - x} \quad \text{n'est pas définié en } 2.$$

Quelle valeur alors pour u_2? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas définie.

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

La proposition qui suit, nous donne une condition qui permet de garantir l'existence de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition

Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* I *est* ***stable*** *par* f*, c'est à dire*

$$f(I) \subset I.$$

Soit $a \in I$*, alors il existe une unique suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifiant :*

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{array}$$

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Étudions quelques propriétés des suites récurrentes. Étudions d'abord la monotonie d'une telle suite.

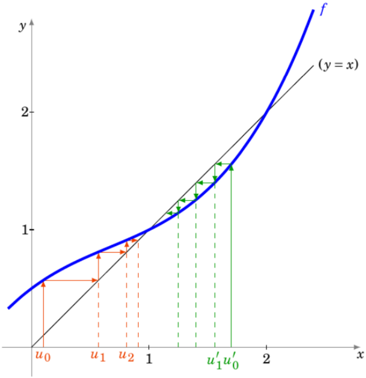
Proposition (Monotonie)

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I **stable** par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{array}$$

Nous avons :

1. *Si f est **croissante** sur I, alors la suite (u_n) est **monotone** :*
    - *Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors (u_n) est **croissante**.*
    - *Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors (u_n) est **décroissante**.*
2. *Si f est **décroissante** sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **monotones** et de **monotonie contraire**. Leurs sens de variation dépendent donc de la position de u_0 par rapport de u_2.*



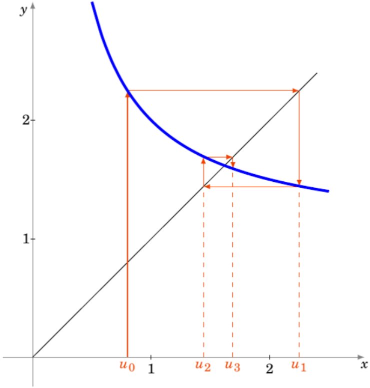


FIGURE – Suites récurrentes par une fonction croissante (gauche) et décroissante (droite).

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Remarques :

- Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il peut parfois être intéressant d'étudier le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ sur I. En effet, supposons par exemple

$$\forall x \in I,\ f(x) - x \geq 0.$$

  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$u_{n+1} - u_n \ = \ f(u_n) - u_n \geq 0.$$

  Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$f(u_{2n}) = u_{2n+1} \quad \Longrightarrow \quad u_{2n+2} \ = \ f \circ f(u_{2n}).$$

  Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **est récurrente associée à la fonction** $f \circ f$. Même chose pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

- Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante.

Démonstration Monotonie.

(1) Supposons f est croissante. Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $u_1 \geq u_0$. Puisque f est croissante, la relation

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$$

permet alors de montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet,

$$\begin{aligned} u_1 \geq u_0 \quad &\Longrightarrow \quad u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1 \\ &\ \ \vdots \\ &\Longrightarrow \quad u_{n+1} = f(u_n) \geq f(u_{n-1}) = u_n \\ &\Longrightarrow \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}. \end{aligned}$$

De même, si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $u_1 \leq u_0$. La relation

$$u_{n+1} - u_{n+2} = f(u_n) - f(u_{n+1}),$$

nous permet comme dans le cas précédent de conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. □

Démonstration Monotonie.

(2) Supposons f est décroissante. Posons

$$g = f \circ f.$$

Cette application est croissante sur I. Soit

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Alors

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = g(u_{2n}) = g(v_n).$$

De même

$$w_{n+1} = g(w_n).$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est récurrente associée à la fonction** g. Même chose pour $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le point (1), permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. $\square$

Démonstration Monotonie.

Si par exemple nous supposons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq v_{n+1}.$$

Maintenant comme f décroissante, on en déduit

$$f(v_n) \geq f(v_{n+1}).$$

Or $u_{2n} = v_n$ et $u_{2n+2} = v_{n+1}$, donc

$$u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} \quad \Longrightarrow \quad w_n \geq w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Finalement, si l'on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, le même raisonnement nous permet de déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. □

Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Étudions maintenant la convergence des suites récurrentes.

Proposition (Convergence)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* I *stable par* f *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & a \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n). \end{array}$$

Si f *est* ***continue*** *sur* I *et si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, alors*

$$f(\ell) = \ell.$$

On dit que ℓ *est un* ***point fixe*** *de* f*.*

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f, il peut parfois être intéressant d'étudier les points d'annulation de

$$x \longmapsto f(x) - x \ \text{ sur } I.$$

Suites complexes

Dans le cours d'algèbre vous avez commence à étudier l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans cette section nous allons étendre la notion de suite réel aux nombres complexes.

Définition (Suite complexe)

*Une **suite complexe** u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & u(n). \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on préfère noter

$$u_n \ \textit{ le complexe } \ u(n).$$

La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$, ou simplement (u_n).

Suites complexes

On peut se demander dans quelle mesure les définitions et les théorèmes de ce chapitre peuvent-ils être étendus aux suites complexes. En tout cas, nous n'avons pas droit aux inégalités dans $\mathbb{C}$, donc une suite complexe ne peut pas être majorée, minorée ou motonone. Par contre, les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Définition (Suite bornée)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** *s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$|u_n| \leq M.$$

où $|u_n|$ est le **module** du complexe u_n.

Suites complexes

À l'aide du module nous pouvons étendre la notion de limite aux suites complexes.

Définition (Limite d'une suite complexe)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Big(\forall n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon\Big).$$

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable, ce qui autorise la notation

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

Remarques :

- Il n'existe pas de limite infinie. En effet, la notion de limite infinie n'a aucun sens pour une suite complexe. Ils sont où $-\infty$ et $+\infty$ dans $\mathbb{C}$?
- Nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \ \text{ dans } \ \mathbb{C} \quad \iff \quad \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0 \ \text{ dans } \ \mathbb{R}.$$

Théorème (Caractérisation de la limite par les parties réelle et imaginaire)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $\ell \in \mathbb{C}$. *Nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell) \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Démonstration.

Supposons $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$0 \leq |\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)| = |\mathrm{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell|,$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell),$$

par le Théorème d'encadrement. Même raisonnement pour conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell).$$

Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$, alors par des opérations sur les limites réels

$$|u_n - \ell| = \sqrt{(\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell))^2 + (\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(\ell))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{0^2 + 0^2} = 0,$$

donc, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. □

Suites complexes

Grâce au résultat précédent nous pouvons conclure :

- Il est toujours vrai qu'une suite convergente est **bornée**.
- Les opérations d'**addition**, **produit**, **multiplication par un scalaire** et **inverse** sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles $+\infty$ et $-\infty$ sont bannis. Nous avons de plus le résultat suivant :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{\ell}.$$

- Le résultats sur les suites extraites sont intégralement maintenus.

En résumé :

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable** :
Unicité de la limite	Majorant/minorant
Une suite convergente est bornée	Monotonie
Opérations sur les limites	Limites infinies
Suites extraites	Passage à la limite des inégalités
	Théorème d'Encadrement
	Théorème de la limite monotone
	Suites adjacentes

Chapitre 3 - Limites et continuité de fonctions

- **Généralités sur les fonctions.**
- **Limite d'une fonction :**
  - Limite en un point.
  - Limite à droite, à gauche.
  - Opérations sur les limites.
  - Théorèmes d'existence de limites.
- **Continuité :**
  - Définition.
  - Prolongement par continuité.
  - Caractérisation séquentielle de la continuité.
  - Opérations sur les fonctions continues.
- **Les grands théorèmes de la continuité :**
  - Théorème des valeurs intermédiaires.
  - Image d'un segment.
  - Théorème de la bijection.

Généralités sur les fonctions

Tout ce que vous avez étudié sur les applications dans le cours d'algèbre, nous allons l'appliquer dans ce chapitre. Rappelons certaines notions.

Définition

Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

une fonction à valeurs réels.

- *L'ensemble E est appelé l'**ensemble de départ** ou **domaine de définition** de f.*
- *Pour tous $x \in E$ et $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x)$, on dit que :*
    - *y est **l'image** de x par f.*
    - *x est un **antécédent** de y par f (pas forcément unique).*

Remarque : Étant donné une fonction f, il faudra toujours commencer par préciser le domaine de définition de f.

Généralités sur les fonctions

Rappelons du cours d'algèbre, les notions d'**image directe** et **image reciproque**.

Définition (Image directe - Image reciproque)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réels.

- *Pour toute partie A de E, on appelle **image (directe)** de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble :*

$$f(A) \;=\; \{y \in \mathbb{R} : \exists a \in A,\; y = f(a)\} \;=\; \{f(a) : a \in A\}.$$

- *L'image de E tout entier est simplement appelée l'**image de** f et est notée généralement*

$$\mathrm{Im} f \quad \textit{plutôt que} \quad f(E).$$

- *Soit B une partie de $\mathbb{R}$. Si toute valeur de f est élément de B(i.e. $\mathrm{Im} f \subset B$). Alors on dit que f est **à valeurs dans** B.*
- *Pour toute partie B de $\mathbb{R}$, on appelle **image réciproque** de B par f, notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\; f(x) \in B\}.$$

Sur l'ensemble des fonctions réels nous pouvons définir les opérations suivants.

Définition (Opérations sur le fonctions réels)

Soit f et g deux fonctions définies sur un ***intervalle commun*** *I.*

- *La* ***somme*** *de f et g est la fonction notée $(f+g)$ définie pour tout $x \in I$ par*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- *Le* ***produit*** *de f et g est la fonction notée $f \cdot g$ définie pour tout $x \in I$ par*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

- *Supposons de plus que g ne s'annule pas sur I. Le* ***quotient*** *de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie pour tout $x \in I$ par :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

La dernière opération à introduire sur l'ensemble de fonctions est la composition.

Définition (Composition)

Soit E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

deux fonctions. On suppose f à valeurs dans F. On appelle ***composée*** *de f suivie de g la fonction $g \circ f$ définie sur E par :*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Remarques :

- La composition, en général, n'est possible que dans un seul sens, et quand elle est possible dans les deux, on n'a aucune raison d'avoir :

$$f \circ g = g \circ f.$$

- La composition est **associative** : Soit

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad g : F \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad h : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

trois fonction à valeurs réels avec

$$\mathrm{Im}(f) \subset F \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(g) \subset G.$$

Alors :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Fonction paire, Fonction impaire

Rappelons la notion de fonction paire/impaire.

Définition (Partie Symétrique)

*Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors on dit que A est **symétrique** par rapport à 0, si*

$$\forall x \in A, \quad -x \in A.$$

Définition (Fonction paire, Fonction impaire)

Supposons A est une partie symétrique de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f est **paire** si*

$$\forall x \in A, \quad f(-x) = f(x).$$

- *On dit que f est **impaire** si*

$$\forall x \in A, \quad f(-x) = -f(x).$$

Fonction paire, Fonction impaire

Exemples :

- Les fonctions

$$x \longmapsto x^2 \quad ; \quad x \longmapsto |x| \quad ; \quad x \longmapsto \cos x$$

  sont paires.

- Les fonctions

$$x \longmapsto 3x \quad ; \quad x \longmapsto x^3 \quad ; \quad x \longmapsto 1/x \quad ; \quad x \longmapsto \sin x$$

  sont impaires.

Fonction paire, Fonction impaire

Remarques :

- Si f est paire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.
- Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ paire ou impaire sur A tout entier, une étude sur $A \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Fonction périodique

Rappelons maintenant la notion de fonction périodique.

Définition (Partie T-périodique)

*Soit $T > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}$. Alors on dit que A T-**périodique**, si*

$$\forall x \in A, \quad x + T \in A \quad \text{et} \quad x - T \in A.$$

Définition (Fonction périodique)

*Soit $T > 0$ et A une partie de $\mathbb{R}$, T-périodique. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est T-**périodique** ou **périodique de période** T si*

$$\forall x \in A, \quad f(x + T) = f(x).$$

*Le réel T est alors appelé **une période** de f.*

Fonction périodique

Exemple :

- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques, la fonction tangente est π-périodique.
- La fonction
$$x \longmapsto x - E(x)$$
est périodique de période 1.

Remarque : Pas besoin d'étudier une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ périodique sur A tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple sur l'ensemble

$$A \cap [-T, T[.$$

C'est-à dire, si la fonction est T-périodique, on restreindra son étude à un segment de longueur T et on complétera la courbe par translation.

Fonctions et relation d'ordre

Étudions quelques propriétés eventuelles des fonctions à valeurs réels.

Commençons par nous intéresser à des fonctions qui préservent (ou inversent) la relation d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

Définition (Fonction croissante, Fonction décroissante)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- *On dit que f est **croissante** (resp. **strictement croissante**), si*

$$\forall x \in A,\ y \in A, \quad x < y \implies f(x) \leq f(y) \quad (\textit{resp. } f(x) < f(y)).$$

- *On dit que f est **décroissante** (resp. **strictement croissante**), si*

$$\forall x \in A,\ y \in A, \quad x < y \implies f(x) \geq f(y) \quad (\textit{resp. } f(x) > f(y).$$

- *On dit que f est (resp. **strictement**) **monotone**, si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.*

Fonctions et relations d'ordre

Exemples :

- La fonction $x \longmapsto 2x+1$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto -3x+1$ est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto 1/x$ est strictement décroissant sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissant sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissant sur $]-\infty,0[$.
- La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement croissant sur $]0,+\infty[$.
- La fonction cosinus est strictement décroissante sur tout intervalle de la forme

$$[2k\pi,(2k+1)\pi],\ (k\in\mathbb{Z})$$

et strictement croissante sur tout intervalle de la forme

$$[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi],\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Mais elle n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.

Fonctions et relations d'ordre

Définition (Majorée, Minorée, Bornée)

Soit A *une partie de* $\mathbb{R}$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *On dit que* f *est* ***majorée*** *sur* A *si*

$$\text{existe } M \in \mathbb{R}, \text{ tel que pour tout } x \in A, \; f(x) \leq M.$$

  Le réel M *est appelé un* ***majorant*** *de* f.

- *On dit que* f *est* ***minorée*** *sur* A *si*

$$\text{existe } m \in \mathbb{R}, \text{ tel que pour tout } x \in A, \; f(x) \geq m.$$

  Le réel m *est appelé un* ***minorant*** *de* f.

- *On dit que* f *est* ***bornée*** *sur* A, *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* A.

Exemple :

- Les fonctions cosinus et sinus sont majorées par 1 et minorées par -1.
- La fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est majorée par 1 et minorée par 0.

Définition (Maximum, Minimum)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I \subset A$.

- *On dit que f admet un **maximum global** en x_0, si pour tout $x \in A$*
$$f(x) \leq f(x_0).$$
- *On dit que f admet un **minimum global** en x_0 si pour tout $x \in A$*
$$f(x) \geq f(x_0).$$
- *On dit que f admet un **maximum local** en x_0, si pour tout $x \in I$*
$$f(x) \leq f(x_0).$$
- *On dit que f admet un **minimum local** en x_0, si pour tout $x \in I$*
$$f(x) \geq f(x_0).$$

Exemples :

- La fonction cosinus admet un maximun global, en tout point de la forme :

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- La fonction sinus admet un minimun global, en tout point de la forme :

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- La fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

admet un maximum global en 0. En effet

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1+x^2} \leq f(0) \ = \ 1.$$

Passons maintenant à étudier la notion de **limite de une fonction**. Pour cela, dans tout ce qui suit, l'ensemble I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera :

- $\overset{\circ}{I} \; = \; I \setminus \{\text{extrémités de } I\}$.
- $\bar{I} \; = \; I \cup \{\text{extrémités de } I\}$.

Exemples :

- Nous avons

$$\overset{\circ}{[a,b]} =]a,b[\quad ; \quad \overset{\circ}{[a,b[} =]a,b[\quad ; \quad \overset{\circ}{]a,b[} =]a,b[.$$

- Nous avons

$$\overline{]a,b[} \; = \; [a,b] \quad ; \quad \overline{[a,b[} \; = \; [a,b] \quad ; \quad \overline{[a,b]} \; = \; [a,b].$$

- Nous avons

$$\overset{\circ}{[a,+\infty[} \; = \; \overset{\circ}{]a,+\infty[} \; =]a,+\infty[\quad \text{et} \quad \overline{]a,+\infty[} \; = \; \overline{[a,+\infty[} \; = \; [a,+\infty[\cup \{+\infty\}.$$

- Nous avons

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}} \; = \; \mathbb{R} \quad ; \quad \overline{\mathbb{R}} \; = \; \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}.$$

Limites d'une fonction

Commençons par donner une définition provisoire mais très intuitive de la limite de une fonction.

Définition Provisoire

Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I. On dit que

f admet une **limite (finie)** $\ell \in \mathbb{R}$ en a

si $f(x)$ est **proche** d'aussi **près que l'on veux** de ℓ pour x **suffisamment** proche de a.

Avec cette définition, étudions la limite de la fonction

$$f : x \longmapsto x^2.$$

en $a = 3$. Vraisemblablement

quand x tend vers 3, la fonction $f(x) = x^2$ tend vers 9.

Selon notre définition provisoire, pour montrer la convergence de la fonction vers 9 en 3, on doit vérifier que x^2 est proche d'aussi près que l'on veux de 9, lorsque x est suffisamment proche de 3.

Par exemple, supposons qu'on veut que x^2 soit à une distance de $\frac{1}{100}$ de 9. Pour cela, on doit avoir

$$9 - \frac{1}{100} \leq f(x) \leq 9 + \frac{1}{100},$$

ce qui est équivalent à

$$|f(x) - 9| \leq \frac{1}{100}.$$

Et cette dernière inégalité est vraie, si et seulement si

$$\left|x^2 - 9\right| \leq \frac{1}{100} \iff |x - 3| \cdot |x + 3| \leq \frac{1}{100}$$

Maintenant, comme on se intéresse ici à x proche de 3, nous pouvons supposer

$$\begin{aligned} |x-3| < 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 < x - 3 < 1 \quad & \Longrightarrow \quad 2 < x < 4 \\ & \Longrightarrow \quad 5 < x + 3 < 7. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\left|x^2 - 9\right| = |x - 3| \cdot |x + 3| \leq 7\,|x - 3|.$$

Limites d'une fonction

Par conséquent, si

$$|x-3| \leq \frac{1}{700} \quad \text{alors} \quad \left|x^2 \ - \ 9\right| \leq \frac{7}{700} = \frac{1}{100}.$$

Notons qu'il n'a rien de spécial sur $\frac{1}{100}$, si l'on veut que

$$\left|x^2 \ - \ 9\right| \leq \epsilon \quad \text{pour } \epsilon \text{ un réel positif,}$$

il suffit que

$$|x-3| < \frac{\epsilon}{7}.$$

Ainsi, on vient de démontrer que $f(x)$ est proche d'aussi près que l'on veux de 9, lorsque x est suffisamment proche de 3.

Formalisons notre définition provisoire de limite, on commence par faire plus précise la notion :

« d'être proche de »

Dans notre exemple, nous avons vu que pour que $f(x)$ soit proche de 9, il faut que la distance

$$|f(x) - 9| \quad \text{soit petit.}$$

Ainsi, le premier changement qu'on va faire à notre définition provisoire est :

Définition Provisoire 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I. On dit que

f admet une **limite (finie)** $\ell \in \mathbb{R}$ en a

si $|f(x) - \ell|$ est aussi **petit que l'on veut** pour x **suffisamment** proche de a.

Maintenant, dans notre exemple nous avons vu que, pour que

$|f(x) - 9|$ **soit aussi petit que l'on veut**,

pour tout $\epsilon > 0$, on doit avoir

$|f(x) - 9| \leq \epsilon$ lorsque x est suffisament proche de 3.

Le deuxième changement qu'on va faire à notre définition provisoire est donc :

Définition Provisoire 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I. On dit que

f admet une **limite (finie)** $\ell \in \mathbb{R}$ en a

si pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$

lorsque x est **suffisamment** proche de a.

Limites d'une fonction

Il ne nous reste donc qu'a faire plus précise la phrase :

« pour x suffisamment proche de 3 »

Dans notre exemple, nous avons vu que

$$|f(x) - 9| \leq \frac{1}{100} \quad \Longleftrightarrow \quad |x - 3| \leq \frac{1}{700}.$$

Ainsi, la propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $|x - 3| \leq \frac{1}{700}$. De même, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons

$$|f(x) - 9| \leq \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x - 3| \leq \frac{\epsilon}{7}.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel strictement positif

$$\delta > 0, \quad \text{il suffit de prendre } \delta = \frac{\epsilon}{7},$$

tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 3| \leq \delta$ la propriété est vraie.

On est à présent prêt pour donner la définition de la limite d'une fonction.

Définition (Limite **en un point**)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I. On dit que :

- *f admet une **limite (finie)** $\ell \in \mathbb{R}$ en a, si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

- *f admet pour **limite** $+\infty$ en a, si*

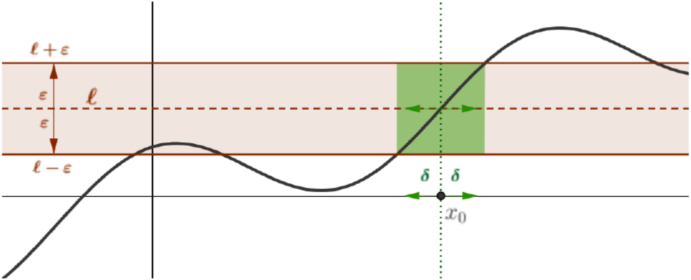
$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \implies f(x) \geq M.$$

- *f admet pour **limite** $-\infty$ en a, si*

$$\forall M < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \implies f(x) \leq M.$$

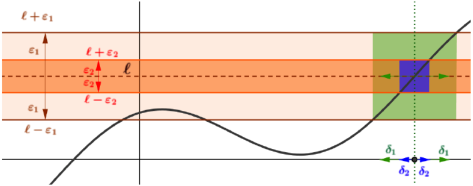
Remarque : Dire que f tend vers ℓ en a, c'est dire que

Pour tout $\epsilon > 0$, l'écart entre $f(x)$ et ℓ est strictement inférieur à ϵ dès que x est assez proche de a.

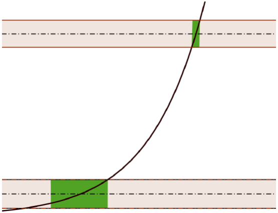


Remarque :

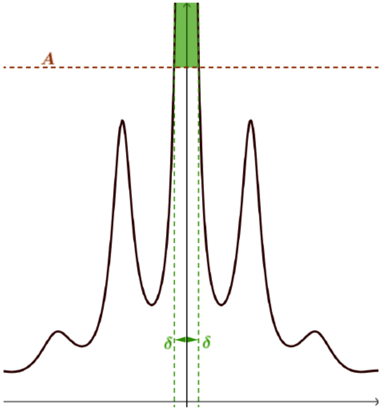
- l'écart δ dépend de ϵ : intuitivement, « plus ϵ est petit, plus il faudra que x soit proche de a pour avoir $|f(x) - \ell| < \epsilon$ ».



- l'écart δ dépend aussi de a : intuitivement, si f a des variations « brusques » au voisinage de a, l'écart δ nécessaire n'est pas le même que si f a des variations « douces » au voisinage de a.



Exemple : f admet pour **limite** $+\infty$ en a



Étendons la définition de limite de une fonction au cas ou $a = +\infty$.

Définition (Limite en $+\infty$)

Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une ***extrémité*** *de I. On dit que :*

- *f admet une* ***limite*** *(finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

- *f admet pour* ***limite*** *$+\infty$ en $+\infty$, si*

$$\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies f(x) \geq M.$$

- *f admet pour* ***limite*** *$-\infty$ en $+\infty$, si :*

$$\forall N < 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies f(x) \leq N.$$

Limites d'une fonction

Exemples :

- Soit
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$
Alors f admet 1 comme limite en $+\infty$.

- Soit
$$f(x) = \frac{e^x}{x^3+3x}.$$
Alors f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

- Soit
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$
Alors f admet 0 comme limite en $+\infty$.

Faisons de même lorsque $a = -\infty$.

Définition (Limite en $-\infty$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une ***extrémité*** *de I. On dit que :*

- *f admet une* ***limite (finie)*** *$\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x \leq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

- *f admet pour* ***limite*** *$+\infty$ en $-\infty$, si*

$$\forall M > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x \leq B \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

- *f admet pour* ***limite*** *$-\infty$ en $-\infty$, si*

$$\forall N < 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x \leq B \Longrightarrow f(x) \leq N.$$

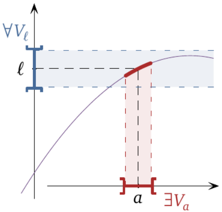
Limites d'une fonction

Exemples :

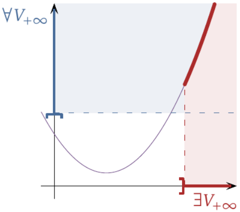
- Soit
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$
Alors f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$.

- Soit
$$f(x) = e^x.$$
Alors f admet 0 comme limite en $-\infty$.

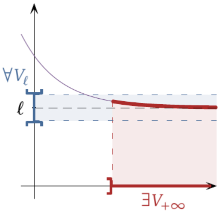
- Soit
$$f(x) = \frac{x^5+1}{x^3+1}.$$
Alors f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$.



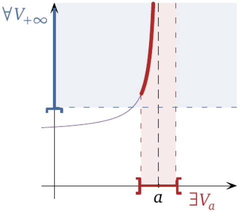
$\lim\limits_{a} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



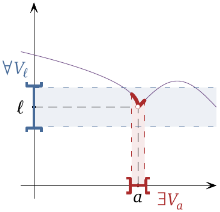
$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$



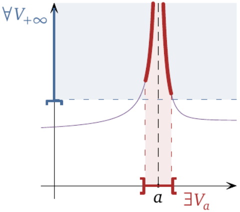
$\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{a} f = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{a} f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$



$\lim\limits_{a} f = +\infty$

Remarque : Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$. Supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x) - \ell| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Unicité de la limite

Si elle existe, on va pouvoir parler de **la** limite, car il y a unicité :

Proposition (Unicité de la limite)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$. *Si* f *admet une limite en* a, *cette limite est alors unique et notée*

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{a} f.$$

Notation : Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la relation $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ est souvent notée :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$$

Unicité de la limite

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ et la limite et finie. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

Raisonnons par l'**absurde** et supposons que f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes en a. Posons

$$\epsilon \ = \ \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0.$$

Par définition de la limite en a, nous avons

$$\begin{aligned} \exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta_1 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - \ell_1| \leq \epsilon \\ \exists \delta_2 > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta_2 \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - \ell_2| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Soit $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors pour tout $x \in I$ avec $|x - a| \leq \delta_0$, nous avons

$$|f(x) - \ell_1| \leq \epsilon \quad \text{et} \quad |f(x) - \ell_2| \leq \epsilon.$$

$\square$

Propriétés de la limite d'une fonction

Démonstration.

Ainsi, à l'aide de l'inégalité triangulaire, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
|\ell_1 - \ell_2| &= |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)| \\
&\leq |f(x) - \ell_1| + |f(x) - \ell_2| \\
&\leq \epsilon + \epsilon \\
&= 2\frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}.
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Par conséquent, $\ell_1 = \ell_2$. D'où le résultat. □

Propriétés de la limite d'une fonction

Étudions quelques propriétés de la limite.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ *et* $\ell \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, *alors*

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|.$$

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

Supposons $a \in \mathbb{R}$, et soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite en a, nous avons

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in I \cap\ ]a - \eta, a + \eta[$, nous avons

$$|\ |f(x)| - |\ell|\ | \leq |f(x) - \ell| \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|.$$

$\square$

Propriétés de la limite d'une fonction

Avant de continuer avec notre étude de la limite, introduisons la notion de **voisinage**.

Définition (Voisinage)

Soit $a \in \overline{I}$. Si $a \in \mathbb{R}$, alors on dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la propriété $\mathscr{P}(x)$ dans un ***voisinage*** *de a, si*

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in \,]a-\delta, a+\delta[\, \cap I \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(x) \ \text{ est vraie.}$$

c'est-à-dire

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(x) \ \text{ est vraie.}$$

Si $a = +\infty$, alors on dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la propriété $\mathscr{P}(x)$ dans un ***voisinage*** *de a, si*

$$\exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x > A \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(x) \ \text{ est vraie.}$$

Si $a = -\infty$, alors on dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait la propriété $\mathscr{P}(x)$ dans un ***voisinage*** *de a, si*

$$\exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x < B \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{P}(x) \ \text{ est vraie.}$$

Propriétés de la limite d'une fonction

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a, c'est-à-dire :

- *si $a \in \mathbb{R}$ alors*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \implies m \leq f(x) \leq M.$$

- *si $a = +\infty$ alors*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ x \geq A \implies m \leq f(x) \leq M.$$

- *si $a = -\infty$ alors*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ \exists B < 0,\ \forall x \in I,\ x \leq B \implies m \leq f(x) \leq M.$$

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

Notons $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. D'après la définition de la limite, pour $\epsilon = 1$, nous avons

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq 1.$$

Ainsi, pour $x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |f(x)| \ = \ |f(x) - \ell + \ell| \quad &\leq \quad |f(x) - \ell| + |\ell| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leq \quad 1 + |\ell|. \end{aligned}$$

Par conséquent, f est bien bornée au voisinage de a. □

Remarques :

- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell > 0$ en $a \in \mathbb{R}$, alors f est minorée au voisinage de a par un nombre strictement positif :

$$\exists m > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq m.$$

- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell < 0$ en $a \in \mathbb{R}$, alors f est majorée au voisinage de a par un nombre strictement negatif :

$$\exists m < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq m.$$

- Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite non nulle en $a \in \mathbb{R}$, alors f est non nulle au voisinage de a :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq 0.$$

On a les mêmes résultats lorsque $a = \pm\infty$.

Limites à gauche - Limites à droite

Définition (Limites à gauche et à droite)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in \overset{\circ}{I}$.

- *On dit que* f *admet une* ***limite à gauche*** *en* a, *si la restriction*

$$f_{|I\cap]-\infty,a[}$$

admet une limite en a. *Cette limite est alors notée :*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x).$$

- *On dit que* f *admet une* ***limite à droite*** *en* a, *si la restriction*

$$f_{|I\cap]a,+\infty[}$$

admet une limite en a. *Cette limite est alors notée :*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \textit{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).$$

Remarque : Les limites à gauche/à droite ne sont jamais que des limites au sens initial du chapitre mais appliquées à des restrictions. Cela justifie leur unicité et la possibilité que nous avons de leur accorder une notation. Ainsi

- Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, dire que : $\ell = \lim_{x \to a^-} f$ revient donc à dire que :

$$\begin{array}{rcll} \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \delta < x < a & \Longrightarrow & |f(x) - \ell| \leq \epsilon & \textbf{si } \ell \in \mathbb{R}, \\ \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \delta < x < a & \Longrightarrow & A < f(x) & \textbf{si } \ell = +\infty, \\ \forall B < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \delta < x < a & \Longrightarrow & f(x) < B & \textbf{si } \ell = -\infty. \end{array}$$

- Pour tout $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, dire que : $\ell = \lim_{x \to a^+} f$ revient donc à dire que :

$$\begin{array}{rcll} \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a < x < a + \delta & \Longrightarrow & |f(x) - \ell| \leq \epsilon & \textbf{si } \ell \in \mathbb{R}, \\ \forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a < x < a + \delta & \Longrightarrow & A < f(x) & \textbf{si } \ell = +\infty, \\ \forall B < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ a < x < a + \delta & \Longrightarrow & f(x) < B & \textbf{si } \ell = -\infty. \end{array}$$

Limites à gauche - Limites à droite

Proposition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in \overset{\circ}{I}$. *Supposons* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \textit{et} \quad f(a) = \ell.$$

Remarque : Dans l'implication

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{et } f(a) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

l'hypothèse $\ell = f(a)$ est **primordial**. Si on ne suppose pas $\ell = f(a)$, alors l'implication

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

est **fausse**.

Limites à gauche - Limites à droite

En effet, considérons f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a bien

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Ainsi, par la proposition précédente, si f a une limite en 0, celle ci doit nécessairement être 0. Posons $\epsilon = \frac{1}{2}$. Alors pour tout $\delta > 0$, on a

$$0 = |0 - 0| \leq \delta,$$

alors que

$$|f(0) - 0| = 1 > \epsilon.$$

La fonction f n'admet donc pas 0 comme limite et n'admet donc pas de limite en 0.

Caractérisation séquentielle de la limite

Les limites d'une fonction peuvent être exprimé à l'aide de la limite de suites numériques.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a \in \bar{I}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \ = \ \ell$.
- *Pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* I, *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, *nous avons*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.$$

Remarques :

- Le théorème précédente contient en particulier le théorème **« Composition à gauche par une fonction »** de notre précédent chapitre.
- Notons que pour utiliser l'implication $\Longleftarrow$ du théorème, il ne suffit pas de montrer que c'est vrai pour une seule suite, mais pour toutes les suites. Cela rend cette implication difficile à utiliser sauf dans le cadre d'exercices **« théoriques »**. Ce théorème est surtout utile pour étendre certaines propriétés étudiées dans le chapitre limite d'une suite au cas de limites d'une fonction.

Caractérisation séquentielle de la limite

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas où $a \in \mathbb{R}$. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

$\Longrightarrow$ Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Fixons $\epsilon > 0$. D'après la défition de la limite

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$. Maintenant, par définition de la limite d'une suite

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad & \Longrightarrow \quad |u_n - a| \leq \eta \\ & \Longrightarrow \quad |f(u_n) - \ell| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell.$$

$\square$

Démonstration.

$\Longleftarrow$ Pour montrer la réciproque, nous allons procéder par contraposition. Supposons donc que f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a. Ainsi

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| \leq \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| > \epsilon. \tag{3}$$

On doit montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors que

$$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ ne converge pas vers } \ \ell.$$

Puisque f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a, on peut d'après (3), pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, trouver $x_n \in I$, tel que

$$|x_n - a| \leq \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - \ell| > \epsilon.$$

Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie, alors il est clair que

$$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ ne converge pas vers } \ \ell.$$

Ce qui montre la contraposé de notre implication. $\square$

Remarque : La **caractérisation séquentielle de la limite** est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction **n'admet pas de limite** en a. En effet, si on trouve deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers a et telles que

$$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

ont deux limites différentes, alors la fonction f n'a pas de limite en a.

Exemples :

- La fonction

$$x \longmapsto f(x) = \cos(x)$$

  n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, les suites

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2\pi n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\pi + 2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$$

  divergent vers $+\infty$, mais

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} \cos(2\pi n) = 1 \quad \text{et} \\ \lim_{n\to+\infty} f(y_n) &= \lim_{n\to+\infty} \cos(\pi + 2\pi n) = -1 \end{aligned}$$

  Donc, f n'a pas de limite en $+\infty$.

Caractérisation séquentielle de la limite

- La fonction

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite en 0^+. En effet, pour tout $n \geq 1$, posons

$$u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{2n\pi}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, mais

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}\right) &= (\pi/2 + 2n\pi) \cdot \sin(\pi/2 + 2n\pi) = \pi/2 + 2n\pi \\ f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) &= (2n\pi) \cdot \sin(2n\pi) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 0.$$

Donc, f n'a pas de limite en 0^+.

Il se passe avec les fonctions, la même chose qu'avec les suites pour les opérations de somme, produit, multiplication par un scalaire et inverse. En particulier, mêmes formes indéterminées. Résumons ceci par les tableaux suivants.

Limite de $f(x) + g(x)$ **en** $a \in \overline{I}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Limite de $f(x) \cdot g(x)$ **en** $a \in \overline{I}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$	$\ell\cdot\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Limite de $\lambda f(x)$ en $a \in \overline{I}$

	$\lambda \in \mathbb{R}$			$\lambda = 0$	$\lambda < 0$		
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$+\infty$	$\ell \neq 0$	$-\infty$	peu importe	$+\infty$	$\ell \neq 0$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x)$	$+\infty$	$\lambda\ell$	$-\infty$	0	$-\infty$	$\lambda\ell$	$+\infty$

Limite de $\frac{1}{f(x)}$ en $a \in \overline{I}$

			$f(x) > 0$ dans un voisinage de a	$f(x) < 0$ dans un voisinage de a	sinon
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	Forme indeterminée

Opérations sur les limites d'une fonction

La dernière opération à étudier sur les limites, est la composition.

Proposition (Composition des limites)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(I) \subset J$, *et* $a \in \overline{I}$. *Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{y \to b} g(y) = c$$

alors

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

Opérations sur les limites d'une fonction

Démonstration.

Faisons la preuve dans le cas où a, b et c sont des réels. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la limite de g, nous avons

$$\exists \delta > 0,\ \forall y \in J,\ |y - b| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |g(y) - c| \leq \epsilon.$$

Maintenant, par définition de la limite de f, on a

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| \leq \delta.$$

On a donc pour tout $x \in I$ avec $|x - a| \leq \eta$, l'inégalité

$$|g(f(x)) - c| \leq \epsilon.$$

Par conséquent

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

$\square$

Passage à la limite dans une inégalité

Comme pour les suites, nous pouvons décrire le comportement des limites d'une fonction par rapport à la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Passage à la limite dans les inégalités strictes)

Soit $a \in \overline{I}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction possedant une limite ℓ en a. Soient $m, M \in \mathbb{R}$.

- *Si $\ell < M$, alors*
$$f(x) < M,$$
***dans un voisinage de** a.*
- *Si $\ell > m$, alors*
$$f(x) > m,$$
***dans un voisinage de** a.*

Démonstration.

Prouvons le première point, le deuxieme point se montre de la même façon. Suppsons $\ell < M$.

- Si $\ell = -\infty$, alors par définition de la limite

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \ < \ M.$$

  C'est-à-dire, $f(x) < M$ dans le voisinage de a donné par $]a-\delta, a+\delta[\cap I$.

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, sachant que $M - \ell > 0$ on peut, d'après la définition de la limite, conclure

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \ < \ M - \ell.$$

  Ainsi

$$\forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta, \quad \ell - M < f(x) - \ell < M - \ell \quad \Longrightarrow \quad f(x) < M.$$

  C'est-à-dire, $f(x) < M$ dans le voisinage de a donné par $]a-\delta, a+\delta[\cap I$.

$\square$

Passage à la limite dans une inégalité

Proposition (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Supposons

- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x \to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$,
- $f(x) \leq g(x)$ ***dans un voisinage de*** a.

Alors $\ell \leq \ell'$, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Remarque : On retiendra que les inégalités strictes deviennent larges en passant à la limite. Par exemple, pour tout

$$x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

mais

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Passage à la limite dans une inégalité

Démonstration.

Faisons la preuve dans le cas où a est un réel. Elle s'adapte facilement aux autres cas.

Par l'absurde. Supposons donc

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta,\quad f(x) \leq g(x).$$

et

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x).$$

Ainsi, $f(x) - g(x) \leq 0$ dans un voisinage de a et

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) > 0.$$

Or la proposition sur le **passage à la limite dans les inégalités strictes** montre que

$$f(x) - g(x) > 0$$

dans un voisinage de a. **Contradiction !** Par conséquent, $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$. □

Théorèmes d'existence de limites

Les théorèmes

- d'**Encadrement**,
- de **Minoration/Majoration**,
- de **la limite monotone**,

que nous avons vu dans le chapitre sur les suites réels, restent valides dans le cas de limites d'une fonction.

Théorèmes d'existence de limites

Théorème (Théorème d'encadrement)

Soient f, g et h trois fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Supposons

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell = \lim\limits_{x \to a} h(x)$,
- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ***dans un voisinage de*** a.

Alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = \ell.$$

Comme corollaire du **Théorème d'encadrement** nous avons le resultat suivant.

Corollaire

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Supposons

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
- il existe $m \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$, tel que $m \leq g(x) \leq M$ **dans un voisinage de** a (i.e. g est **bornée** au voisinage de a).

Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Théorèmes d'existence de limites

Exemple : Déterminer si elle existe la limite en 0 de

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution : Nous avons :

- La fonction $x \longmapsto x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
- La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est une fonction bornée au voisinage de 0.

Ainsi, d'après la proposition précédente, on en déduit l'égalité

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Théorèmes d'existence de limites

Théorème (Théorème de Minoration/Majoration)

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- *Si* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, *et*
$$f(x) \geq g(x)$$
dans un voisinage de a, *alors*
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$
- *Si* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, *et*
$$f(x) \leq g(x),$$
dans un voisinage de a, *alors*
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Théorèmes d'existence de limites

Théorème (Théorème de la limite monotone cas f croissante)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$.

*Supposons que f est **croissante.***

- *Si f est **majorée**, alors f admet une limite finie en b, et*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} f(x).$$

  Sinon, on a $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

- *Si f est **minorée**, alors f admit une limite finie en a, et*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in]a,b[} f(x).$$

  Sinon, on a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Théorèmes d'existence de limites

Théorème (Théorème de la limite monotone cas f décroissante)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$.

*Supposons que f est **décroissante**.*

- *Si f est **minorée**, alors f admet une limite finie en b et*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in]a,b[} f(x).$$

  Sinon, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

- *Si f est **majorée**, alors f admet une limite finie en a et*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} f(x).$$

  Sinon, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Théorèmes d'existence de limites

Comme corollaire du **Théorème de la limite monotone**, nous avons le résultat suivant.

Corollaire

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in \mathring{I}$. Alors, f admet des **limites finies à gauche et à droite** en a et on a :*

$$\text{si } f \text{ est \textbf{croissante} alors} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x).$$
$$\text{si } f \text{ est \textbf{décroissante} alors} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \to a^-} f(x).$$

Définition (Continuité)

Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est ***continue*** *en a si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Autrement dit, f est continue en a ***si et seulement si***

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

Remarque : Géométriquement, une fonction est continue si son graphe se trace **« sans lever le crayon »**.

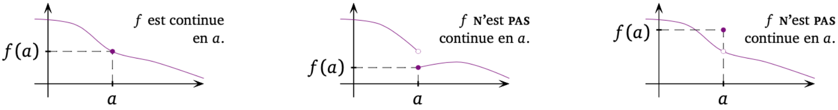


FIGURE – Continuité en un point.

Exemple : La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 2.

Solution : Nous devons montrer que

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x} \; = \; \sqrt{2}.$$

Pour cela, notons que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$|\sqrt{x} - \sqrt{2}| \; = \; \frac{|x-2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \; \leq \; |x-2|.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, prenons

$$\eta = \epsilon.$$

Si $|x-2| \leq \epsilon$, alors

$$|\sqrt{x} - \sqrt{2}| \leq \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 2} \sqrt{x} \; = \; \sqrt{2}.$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est donc continue en 2.

Définition (Continuité sur un intervalle)

*On dit que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue sur l'intervalle** I si elle est **continue en chaque point** de I.*

On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I dans $\mathbb{R}$, i.e. continues en tout point de I.

Exemple : Les fonctions

$$x \longmapsto x \quad ; \quad x \longmapsto \exp x \quad ; \quad x \longmapsto \cos x \quad ; \quad x \longmapsto \sin x$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

est continues sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Finalement, la fonction

$$x \longmapsto \ln(x)$$

est continues sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Continuité

Définition (Continuité à gauche/à droite en un point)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- ***Continuité à gauche** : On dit que f est continue **à gauche** en a si $f(a)$ est la limite à gauche de f en a, i.e.*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

- ***Continuité à droite** : On dit que f est continue **à droite** en a si $f(a)$ est la limite à droite de f en a, i.e.*

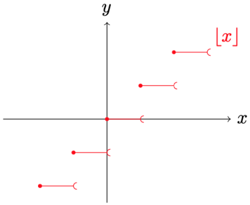
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Remarque : Une fonction f est **continue** en a *si et seulement si* f est **continue** à **droite** et à **gauche** en a.

<u>**Exemple**</u> : La fonction partie entière

$$x \longmapsto E(x)$$

est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.



Définition (Prolongement par continuité)

Soit $a \in I$ *et* $f : I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est* ***prolongeable par continuité*** *en* a *s'il existe une fonction*

$$\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$$

continue *en* a *et telle que*

$$\tilde{f}_{|I\backslash\{a\}} = f.$$

Continuité

Proposition

Soit $a \in I$ et $f : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

La fonction f est prolongeable par continuité en a ***si et seulement si*** *f admet une limite finie ℓ en a. Dans ce cas, un tel prolongement $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est unique, et donné par :*

$$\tilde{f} \ : \ x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On l'appelle le ***prolongement par continuité de f en a*** *(qu'on notera souvent f sans distinction par abus de notation).*

Démonstration.

$\Longrightarrow$ Supposons que f est prolongeable par continuité en a. Par définition, il existe donc

$$\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

continue en a et telle que

$$\tilde{f}_{|I\setminus\{a\}} = f.$$

Par continuité de $\tilde{f}$ en a, nous avons

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x\to a^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to a^+} \tilde{f}(x).$$

Or $\tilde{f}_{|I\setminus\{a\}} = f$, donc

$$f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Ainsi f admet une limite ℓ en a avec $\ell = \tilde{f}(a)$. Ceci prouve également l'unicité (s'il existe) du prolongement par continuité de f en a. $\square$

Continuité

Démonstration.

$\Longleftarrow$ Supposons que f admet une limite finie ℓ en a. Posons alors

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} .$$

La fonction $\tilde{f}$ prolonge bien f, et est continue en a puisque

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a^+} \tilde{f}(x).$$

$\square$

Exemples :

- Considérons la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

définie sur $\mathbb{R}^*$. Puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

- **Fonctions puissances** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction puissance d'exposant α, notée p_α, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

On a

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}.$$

Ainsi, si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongeable par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

Continuité

Le résultat suivant est la version continue du résultat analogue sur les limites d'une fonction.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- f *est continue en* a.
- *Pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* I, *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a,$$

nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a).$$

Remarques :

- En résumé, pour une fonction continué f et pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, nous avons

$$f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$$

- Ce théorème a déjà souvent été utilisé dans le contexte des suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ et si f est (définie et) **continue** en ℓ, alors

$$f(\ell) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell.$$

C'est-à-dire, ℓ est un point fixe de f.

Opérations sur les fonctions continues

Proposition (Somme et produit sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. *Les fonctions $\lambda f + \mu g$, $f \times g$ sont continues sur I.*
2. *Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.*

Démonstration.

Ces résultats découlent immédiatement des résultats analogues que nous avons vu dans le chapitre limites de fonctions. □

Exemples :

- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes et produits de fonctions continues.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $\tan$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ en tant que quotient de fonctions continues.
- La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ privé de ses pôles, c'est-à-dire des racines de son dénominateur Q.

Opérations sur les fonctions continues

Le dernière opération à étudier sur les fonctions continues est la composition.

Proposition (Composition sur les fonctions continues)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur J avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction

$$g \circ f$$

est ***continue*** *sur I.*

Passons maintenant à étudier quelques propriétés fondamentales des fonctions continues.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))

Soit $f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a, b \in I$*, tels que*

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Alors il existe c *compris entre* a *et* b *tel que*

$$f(c) = 0.$$

Démonstration.

Supposons que $a < b$. On construit par récurrence deux suites **adjacentes**

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

d'éléments de $[a, b]$ dont la limite commune c vérifie $f(c) = 0$. Construisons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons définir a_n et b_n de façon d'avoir

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \text{et} \quad f(a_n)f(b_n) < 0.$$

Pour cela, posons $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Ainsi

- si $f(a_n) \cdot f(m_n) \leq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
- si $f(a_n) \cdot f(m_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans chacun de ces deux cas, on obtient

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

□

Démonstration.

Montrons que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes**. Par construction

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**, et
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.
- De plus, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \implies \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0.$$

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $c \in [a,b]$.

Comme f est continue, en passant à la limite dans l'inégalité $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, on obtient

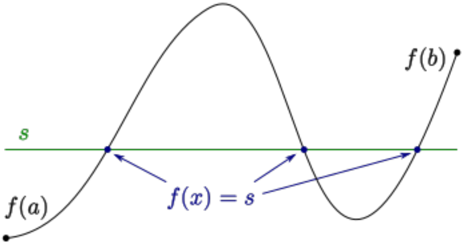
$$f(c)^2 \ = \ f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) \ = \ \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \ \leq \ 0.$$

Ainsi, $f^2(c) \leq 0$. Donc $f(c) = 0$ et le théorème est démontré. $\square$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « existence d'un antécédent »)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = y.$$



Démonstration.

Soit y entre $f(a)$ et $f(b)$ et posons $g(x) = f(x) - y$. Alors

- La fonction g est continue, et
- $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires, c'est-à-dire $g(a) \cdot g(b) \leq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b]$, tel que

$$f(c) = y.$$

□

Comme corollaire du résultat précédent nous avons le théorème suivant.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires, version « image d'un intervalle »)

Si I est un intervalle et si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Remarque : Si I est un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version du TVI affirme que $f(I)$ est également un intervalle, mais pas que I et $f(I)$ sont de même nature. Il se peut que I soit ouvert et $f(I)$ un segment (intervalle fermé et borné), ou bien que I soit semi-ouvert et $f(I)$ ouvert, etc.

Exemples :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sin(x) & \text{et} & f(]-\pi,\pi[) = [-1,1]; \\ g(x) = x^2 & \text{et} & g(]-1,1[) = [0,1[. \end{array}$$

Les Grands Théorèmes de la Continuité

Théorème (Théorème des bornes atteintes)

- *Toute fonction continue sur un* ***segment*** *(intervalle fermé et borné) y est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue sur* $[a, b]$*, alors il existe* $c \in [a, b]$ *et* $d \in [a, b]$ *tels que pour tout* $x \in [a, b]$*, nous avons*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

- *L'image d'un* ***segment*** *par une fonction continue est un* ***segment****.*

Remarques :

- Nous avons vu que la continuité ne préserve pas la forme des intervalles en général, mais en tout cas une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.
- Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée en général. Par exemple, la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On fini ce chapitre en étudiant la réciproque d'une fonction continue.

Théorème

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective sur I **si et seulement si** f est strictement monotone.*

Théorème (Continuité d'une réciproque)

*Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I **réalise une bijection** de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa **réciproque** est de plus continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ de même monotonie que f.*