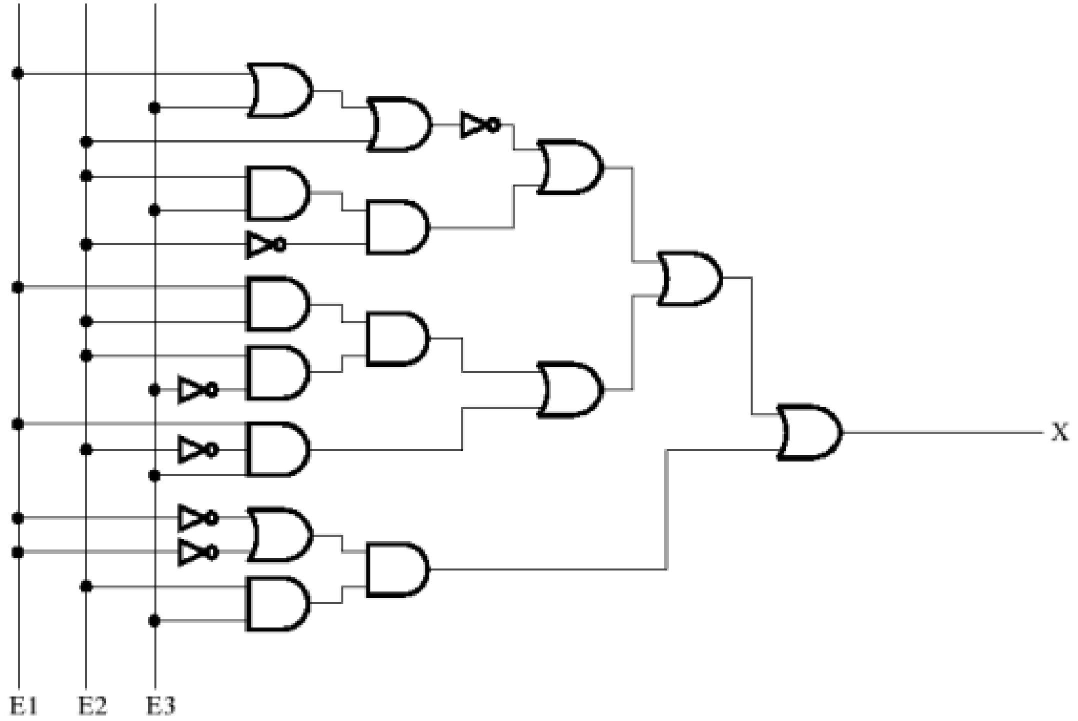


INFORMATIQUE 1

III. ALGEBRE DE BOOLE

Eva Ansermin & Romuald Grignon

CY TECH

Algèbre de Boole : introduction

- Nous avons vu que les ordinateurs ne peuvent manipuler que des **0** et des **1**.
- Comment parviennent-ils à effectuer des opérations ?
- Les opérations effectuées « électroniquement » dans un ordinateur sont basées sur l'algèbre de Boole.
- **L'algèbre de Boole est une approche algébrique de la logique.**

George BOOLE
(1815-1864)

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Variables

- L'algèbre de Boole permet de modéliser des raisonnements logiques.

- Elle manipule des données qui ne peuvent prendre que 2 valeurs
  - **VRAI**
  - **FAUX**

  Ce sont des **variables logiques ou booléennes**

- L'algèbre de Boole est donc exploité pour faire des opérations par l'ordinateur. On aura :
  - **VRAI ≈ 1**
  - **FAUX ≈ 0**

- On peut construire des fonctions dépendant d'une ou plusieurs variables logiques : ce sont des **fonctions logiques**

George BOOLE
(1815-1864)

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

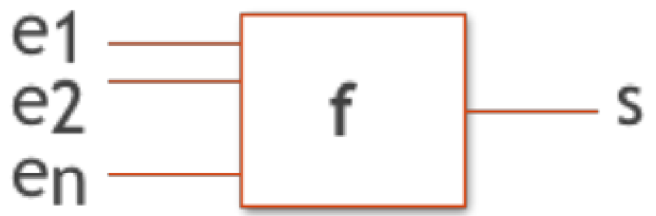
Algèbre de Boole : Fonctions logiques

- Les **fonctions logiques** permettent d'exprimer une sortie logique en fonction d'entrées logiques.
- Les fonctions logiques peuvent se représenter sous plusieurs formes :

- **Equation**

$$S = f\ (e1, e2, e3, \ldots, en)$$

- **Symbole Logique**



- **Table de vérité**

e_1	e_2	…	e_n	s
0	0	…	0	
0	0	…	1	
…	…	…	…	
1	1	….	0	
1	1	….	1	

Algèbre de Boole : Table de vérité

- Une table de vérité est un tableau indiquant la sortie d'une fonction logique selon toutes les combinaisons possibles d'entrées.

Entrées logiques

sortie

Combinaison d'entrées

e_1	e_2	e_3	…	e_n	s
0	0	0	…	0	0
0	0	0	…	1	1
…	…	…	…	…	
1	1	1	….	0	1
1	1	1	….	1	0

Sortie associée

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Table de vérité

➢ Exemple avec 2 entrées

e_1	e_2	s
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

➢ Pour ne pas oublier de lignes, on peut compter en binaire.

➢ Pour n entrées, il y a 2^n combinaisons différentes d'entrées, soit 2^n lignes dans la table de vérité.

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

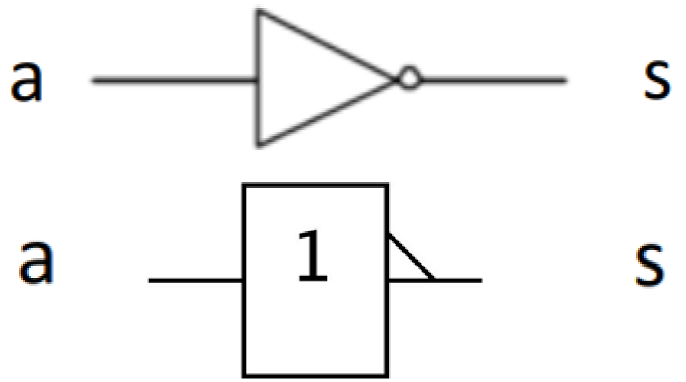
Algèbre de Boole : Opérateurs de base

➤ **<u>L'inversion NON/NOT</u>** : la sortie vaut 1 si l'entrée vaut 0 et inversement. La sortie est le *complément* de l'entrée.

- La **table de vérité**

a	$s = \bar{a}$
0	1
1	0

- Le **symbole**



- **L'équation**

$s = \overline{a}$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

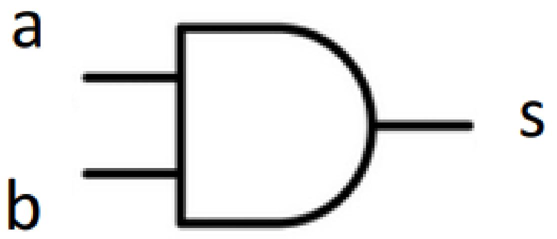
Algèbre de Boole : Opérateurs de base

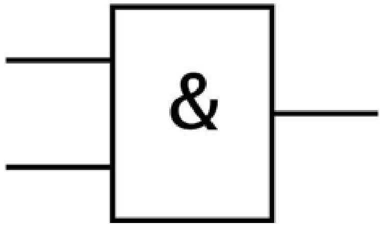
➢ **<u>Le ET/AND</u>**: La sortie vaut 1 si TOUTES les entrées valent 1
(la sortie vaut 0 si AU MOINS une entrée vaut 0)

- La **table de vérité**

a	b	$s = a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Le **symbole**





- **L'équation**

s = a.b

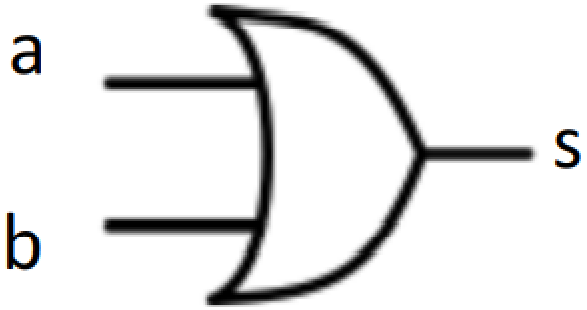
Algèbre de Boole : Opérateurs de base

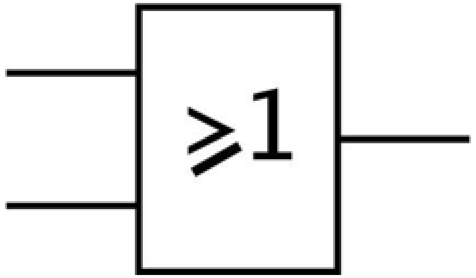
➢ **<u>Le OU/OR :</u>** La sortie vaut 1 si AU MOINS une entrée vaut 1
(la sortie vaut 0 si TOUTES les entrées valent 0)

- La **table de vérité**

a	b	$s = a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Le **symbole**





- **L'équation**

s = a+b

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

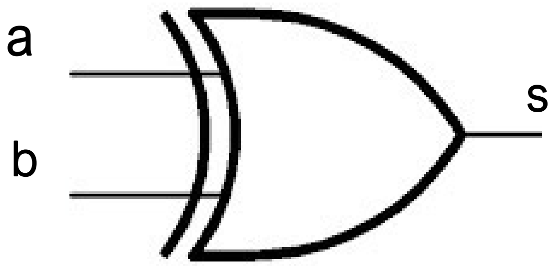
Algèbre de Boole : Opérateurs de base

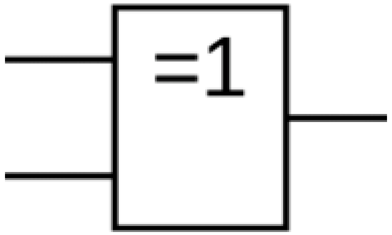
- **<u>Le XOR/OU EXCLUSIF:</u>** La sortie vaut 1 si UNE SEULE entrée vaut 1

- La **table de vérité**

a	b	$s = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Le **symbole**





- **L'équation**

$$s = a \oplus b$$
$$s = \overline{a}b + a\overline{b}$$

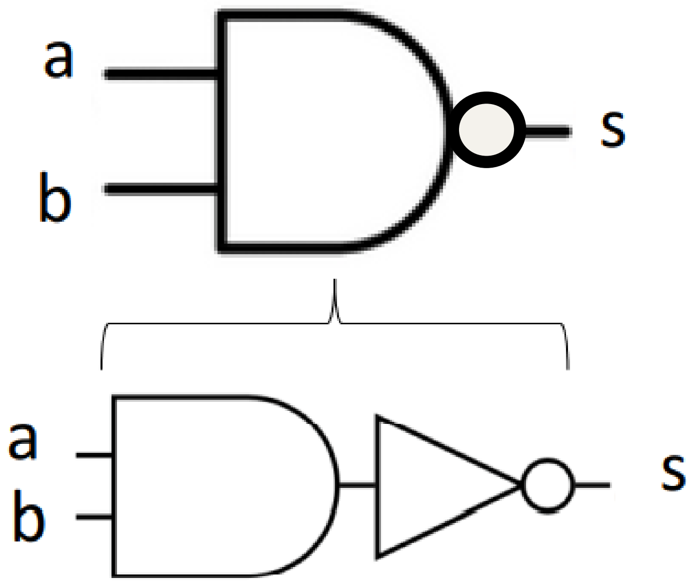
Algèbre de Boole : Opérateurs de base

- On peut associer le **NON** à d'autre portes pour obtenir la fonction complémentaire :
- Exemple: le **NON-ET/NAND**

- La **table de vérité**

a	b	$s = \overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Le **symbole**



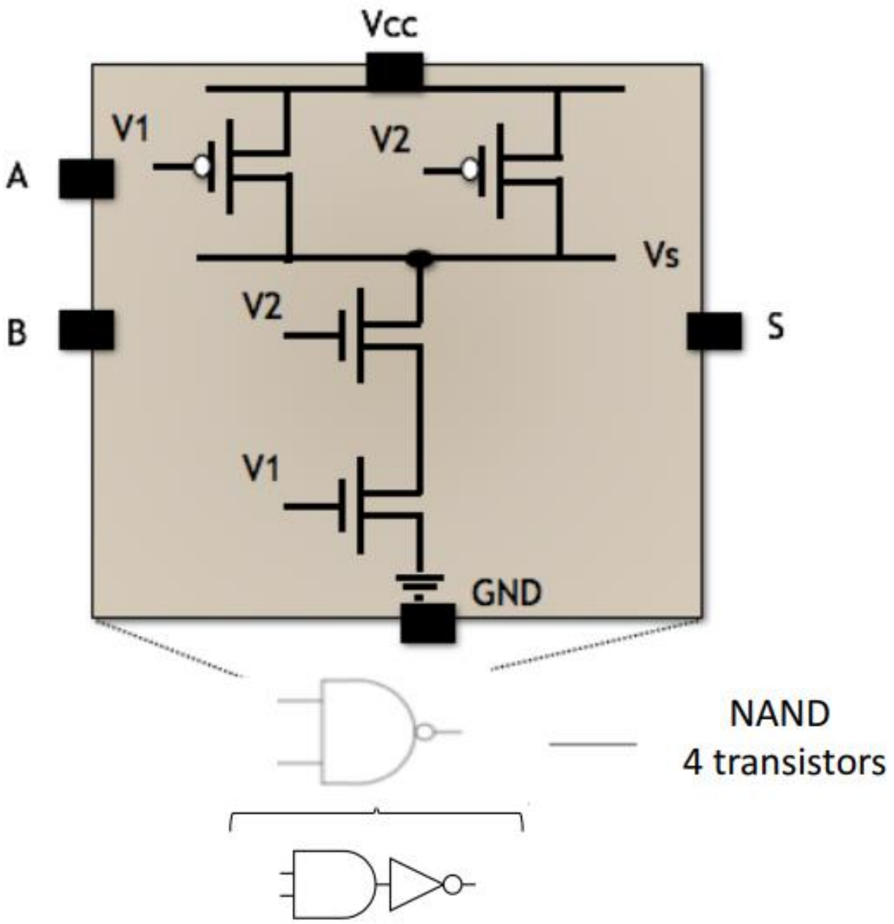
- **L'équation**

$$s = \overline{a.b}$$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Implémentation physique

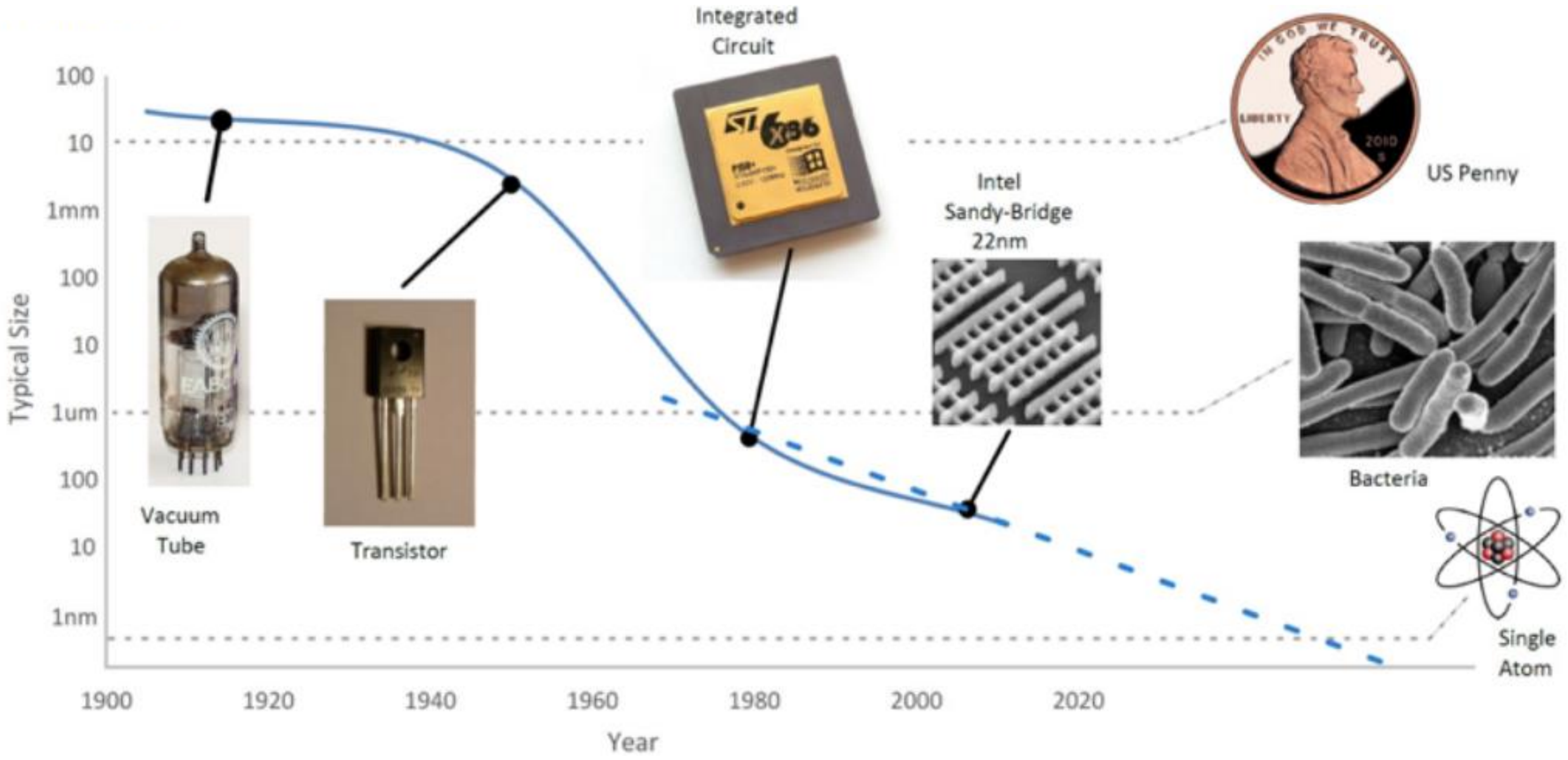
- ➢ **Les circuits électroniques peuvent reproduire ces opérateurs!**
- ➢ **Les transistors sont la base de cette implémentation.**



Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Implémentation physique

- Les circuits électroniques peuvent reproduire ces opérateurs!
- Les transistors sont la base de cette implémentation.



Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Implémentation physique

- **Les circuits électroniques peuvent reproduire ces opérateurs!**
- **Les transistors sont la base de cette implémentation.**

- Les portes logiques pouvant être reproduites par des circuits électroniques, on peut donc implanter physiquement des fonctions logiques dans un ordinateur pour effectuer des opérations.

- Pour économiser des ressources, il faut utiliser le moins de portes logiques possibles pour une même fonction logique.

- A l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole, on va chercher à réduire et simplifier les fonctions logiques.

Algèbre de Boole : Propriétés

Lois	**ET**	**OU**	**Lois**	**ET**	**OU**
Identité	1.A = A	0+A = A	**Nullité**	0.A = 0	1+A = 1
Associativité	(A.B).C = A.(B.C)	(A+B)+C = A+(B+C)	**Commutativité**	A.B = B.A	A+B = B+A
Distributivité	A.(B+C) = A.B + A.C		**Idempotence**	A.A = A	A+A = A
Inversion	$A.\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$	**Loi de De Morgan**	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

Algèbre de Boole : Loi de Morgan

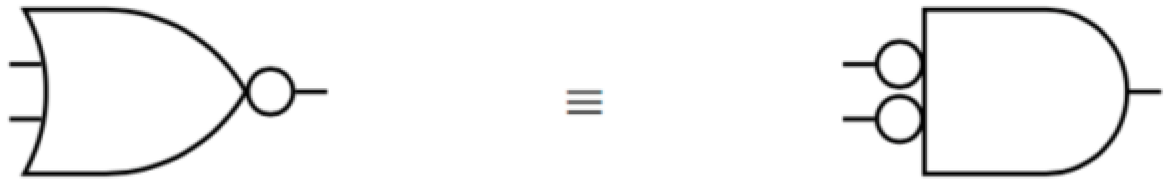
- $\overline{a + b} = \overline{a} \, . \, \overline{b}$

Dans les deux cas, l'expression ne sera VRAIE que si a ET b sont fausses

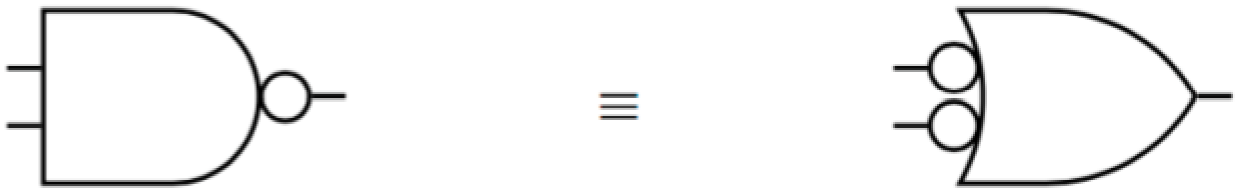
- $\overline{a \, . \, b} = \overline{a} + \overline{b}$

Dans les deux cas, l'expression ne sera VRAIE que si a OU b sont fausses

- $\overline{a + b} = \overline{a} \, . \, \overline{b}$



- $\overline{a \, . \, b} = \overline{a} + \overline{b}$



Algèbre de Boole : Loi de Morgan

➢ Démonstration de la loi de Morgan avec une table de vérité :

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\,.\,\bar{b}$	$a+b$	$\overline{a+b}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

On a bien :

$$\overline{a+b} = \bar{a}\,.\,\bar{b}$$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Loi de Morgan

- Démonstration de la loi de Morgan par énoncé logique:

Soit l'énoncé suivant :

« Je sors s'il ne pleut pas **et** s'il fait chaud. »

Quelle est la **contraposée** de cet énoncé?

→ **« Je ne sors pas s'il pleut ou s'il fait froid »**

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Simplification d'expression

➢ A l'aide de propriétés Booléennes démontrer les règles suivantes:

1. Règle d'absorption : $a.(a+b) = a$

<u>Démonstration :</u>

$$
\begin{aligned}
a.(a+b) &= a.a + a.b && (\text{distributivité du ET}) \\
&= a + a.b && (a.a = a) \\
&= a(1+b) && (\text{factorisation par a et a.} 1 = \text{a}) \\
&= a && (1 + \text{b} = 1\ \forall\ \text{b})
\end{aligned}
$$

Algèbre de Boole : Simplification d'expression

- A l'aide de propriétés Booléennes démontrer les règles suivantes:

1. Règle de simplification : $a + \bar{a}.b = a + b$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
a + \bar{a}.b &= a.(a + b) + \bar{a}.b && \text{(voir slide précédente)} \\
&= a.a + a.b + \bar{a}.b && \\
&= a + a.b + \bar{a}.b && (a.a = a) \\
&= a + b(a + \bar{a}) && \text{(factorisation)} \\
&= a + b && (a + \bar{a} = 1)
\end{aligned}
$$

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Pour simplifier une expression logique, on peut :
  1. La simplifier à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (slides précédentes)
  2. Utiliser un **tableau de Karnaugh**

- Un tableau de Karnaugh est une représentation différente de la table de vérité : il s'agit d'un tableau à double entrée donnant les valeurs de la sortie en fonction des entrées.

Valeurs possibles du couple d'entrées b et c

Valeurs possibles de l'entrée a

a \ b c				

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Pour simplifier une expression logique, on peut :
  1. La simplifier à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (slides précédentes)
  2. Utiliser un **tableau de Karnaugh**

- Un tableau de Karnaugh est une représentation différente de la table de vérité : il s'agit d'un tableau à double entrée donnant les valeurs de la sortie en fonction des entrées.

Valeurs possibles du couple d'entrées b et c

a \ b c				
0				
1				

Valeurs possibles de l'entrée a

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Pour simplifier une expression logique, on peut :
  1. La simplifier à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (slides précédentes)
  2. Utiliser un **tableau de Karnaugh**

- Un tableau de Karnaugh est une représentation différente de la table de vérité : il s'agit d'un tableau à double entrée donnant les valeurs de la sortie en fonction des entrées.

Valeurs possibles du couple d'entrées b et c

Valeurs possibles de l'entrée a

a \ b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0				
1				

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Pour simplifier une expression logique, on peut :
  1. La simplifier à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (slides précédentes)
  2. Utiliser un **tableau de Karnaugh**

- Un tableau de Karnaugh est une représentation différente de la table de vérité : il s'agit d'un tableau à double entrée donnant les valeurs de la sortie en fonction des entrées.

Valeurs possibles du couple d'entrées b et c

Valeurs possibles de l'entrée a

a \ b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0				
1				

Dans la construction du tableau les valeurs des variables ne doivent varier que d'**un seul bit** entre chaque ligne / colonne !

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Pour simplifier une expression logique, on peut :
  1. La simplifier à l'aide des propriétés de l'algèbre de Boole (slides précédentes)
  2. Utiliser un **tableau de Karnaugh**

- Un tableau de Karnaugh est une représentation différente de la table de vérité : il s'agit d'un tableau à double entrée donnant les valeurs de la sortie en fonction des entrées.

- Une fois le tableau rempli, **on regroupe TOUTES les cases contenant '1' par des groupes de tailles en puissances de 2** (1, 2, 4, …). Il faut prendre les groupes les plus grands possibles.

- En analysant ces groupes, on peut trouver une équation directement simplifiée.

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a \ b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0

$s =$

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a \ b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1	0
1	0	0	1	0

On remarque que dans ce paquet de 1 on a b=a=0

$$s = \bar{a}.\bar{b}$$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a \ b c	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0

On remarque que dans ce paquet de 1 on a b=c=1

$$s = \bar{a}.\bar{b} + b.c$$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a b \ c d	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	0

$s =$

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a b \ c d	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	0

On remarque que dans ce paquet, on a : d=1

$$s = d +$$

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

ab \ cd	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	0

On pourrait regrouper ces deux 1, mais il est possible d'obtenir un plus grand groupe

$$s = d + b.c.\bar{d}$$

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- Exemple: soit le tableau de Karnaugh suivant, trouvez l'équation logique associée

a b \ c d	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	1	1	0
0 1	0	1	1	1
1 1	0	1	1	1
1 0	0	1	1	0

Dans ce groupe on a c=1 et b=1

$$s = d + b.c$$

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

- On peut « reboucler sur le tableau »

ab \ cd	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	0	0	0	0
0 1	1	0	0	1
1 1	1	0	0	1
1 0	0	0	0	0

$$s = b.\bar{d}$$

- Il faut que TOUS les 1 appartiennent à un groupe.

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Construction de circuit logique

- Pour construire un circuit logique à partir d'un énoncé:

1. Construire la table de vérité

2. Déterminer l'équation logique grâce :

   à la simplification de l'équation logique

   OU

   au tableau de Karnaugh

3. Dessiner le circuit à l'aide de portes logiques.

Algèbre de Boole : Représentation logique

Exemple : « S(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »

1. <u>Table de vérité :</u>

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Algèbre de Boole : Représentation logique

« S(A,B,C) = 1 ssi la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »

<u>2 Equation :</u>

1. On regroupe les cas ou S=1
2. On simplifie l'équation

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

$$a + a = a$$

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + (a + a + a)bc$$

$$s = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc + abc + abc$$

$$s = bc\,(\bar{a} + a) + ab(\bar{c} + c) + ac\left(\bar{b} + b\right)$$

$$\boldsymbol{s = bc + ab + ac}$$

$$a + \bar{a} = 1$$

A	B	C	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Eva ANSERMIN & Romuald GRIGNON

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

Ou utilisation du tableau de Karnaugh

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

A	B	C	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Algèbre de Boole : Tableau de Karnaugh

Ou utilisation du tableau de Karnaugh

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$$s = bc + ab + ac$$

A	B	C	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

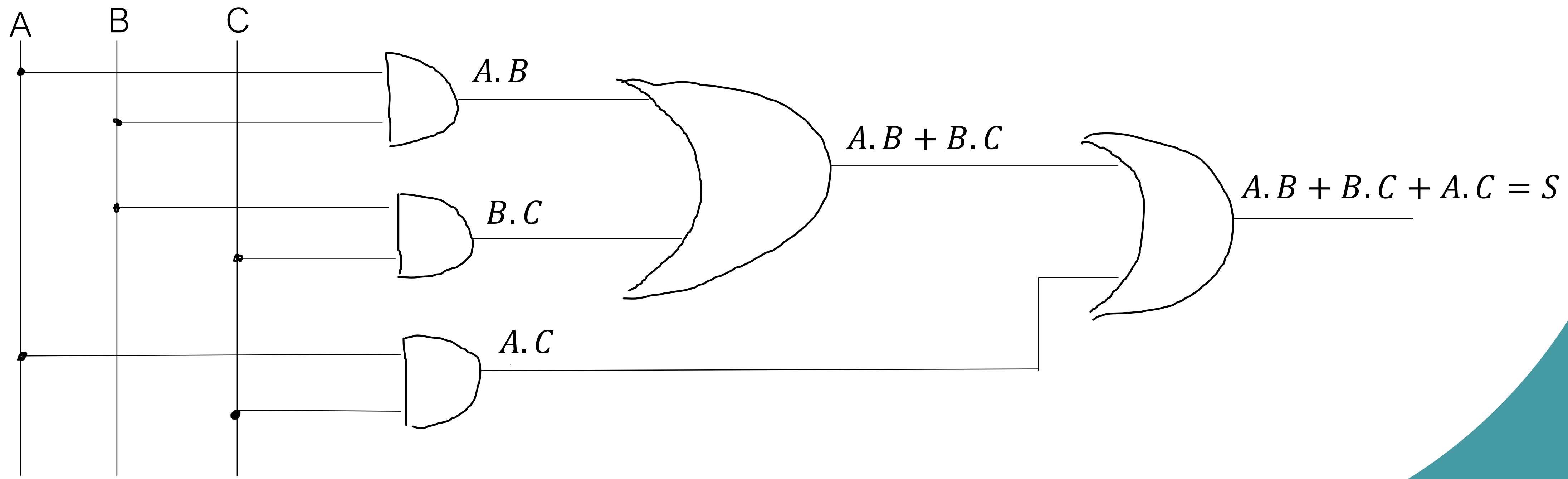
On retrouve bien le même résultat.

Algèbre de Boole : Représentation logique

« S(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »

<u>3.Circuit :</u>

S=BC+AC+AB

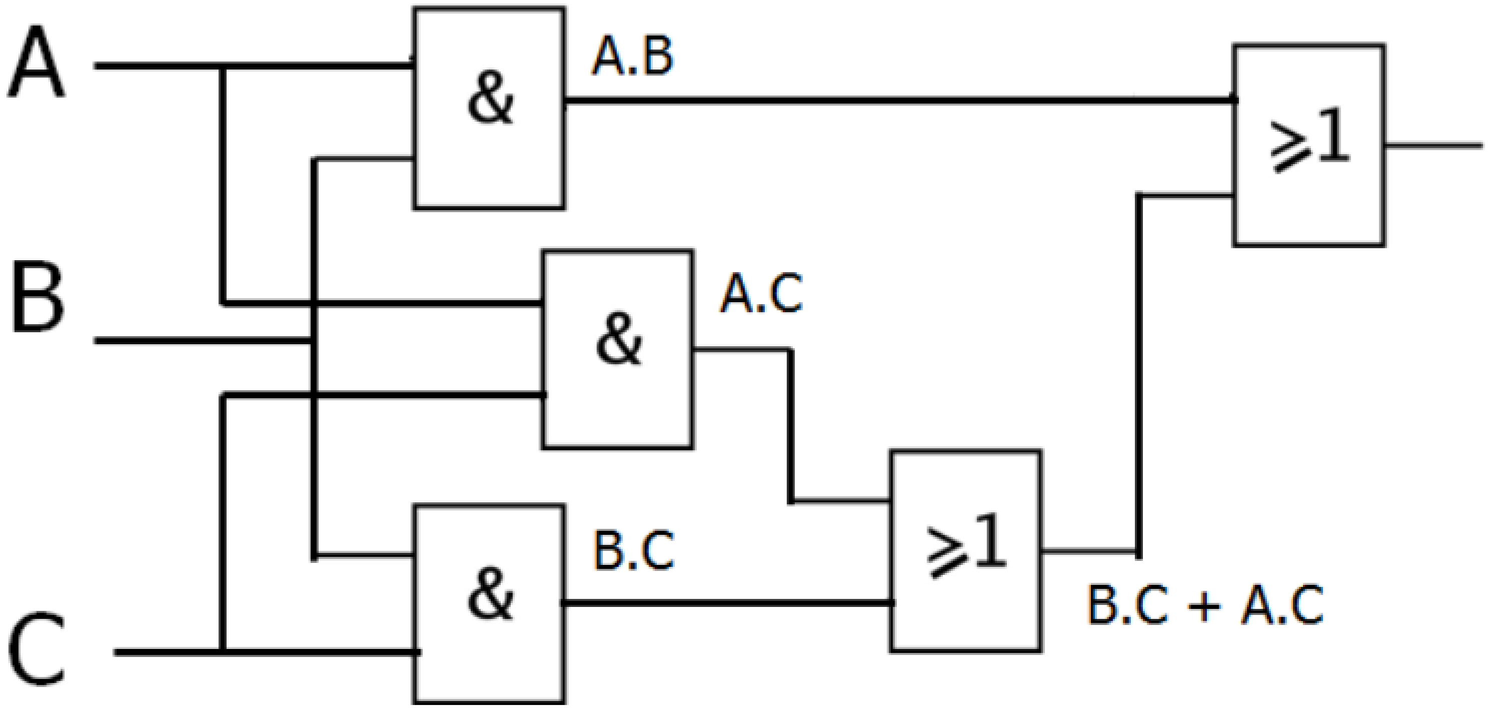


Algèbre de Boole : Représentation logique

« S(A,B,C) = 1 si et seulement si la majorité des trois variables A, B, C valent 1. »

<u>3.Circuit :</u>

S=BC+AC+AB



Conclusion

- L'algèbre de Boole permet de modéliser des énoncés logiques et utilise des variables dont les valeurs possibles sont VRAI (1) ou FAUX (0).

- A partir d'un énoncé, on peut déterminer une équation et un circuit logique répondant au problème.

- Les différents opérateurs de l'algèbre de Boole sont implémentables sur des circuits électroniques grâce aux transistors.

- Le fonctionnement d'un ordinateur se base sur l'algèbre de Boole : les différents calculs et traitements de données effectués par un ordinateur (comparaison, addition etc.) sont modélisés par des circuits logiques implémentés sur carte électronique.