Comparaison locale de fonctions réelles

9 septembre 2024

Négligeabilité

Définition : Voisinage

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme :

- $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ si $a \in \mathbb{R}$
- $]A, +\infty[$ si $a = +\infty$
- $]-\infty, A[$ si $a = -\infty$.

Dans la suite $\mathcal{V}(a)$ désigne un voisinage de a.

Définition

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions $\mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}(a)$ sauf éventuellement en a, avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note dans ce cas $f \underset{a}{=} o(g)$ et on lit « f est un petit o de g au voisinage de a ».
Une autre notation possible est : $f \underset{a}{<<} g$

Exemples

$$x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^4), \qquad x^4 \underset{0}{=} o(x^2), \qquad \frac{1}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \frac{1}{x} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Remarque

Dans la suite, pour alléger les énoncés, on notera parfois tout court $f \underset{a}{=} o(g)$ et on supposera dans ce cas que les hypothèes dans la définition précédente sont satisfaites.

Definition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $(v_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)_n$ est négligeable devant $(v_n)_n$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On note dans ce cas $u_n = o(v_n)$ et on lit »u_n est un petit o de v_n.
Une autre notation possible est : $u_n << v_n$.

Exemples

$2^n = o(3^n), \quad n^2 = o(2^n), \quad \ln(n) = o(n)$

Proposition

Soit $f : \mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{=} \ell + o(1).$$

En particulier, $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow f \underset{a}{=} o(1)$. Ainsi, $o(1)$ est une fonction de limite nulle en a.

Proposition : Opérations sur les petits o

1. **Transitivité** :
   Si $g = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.
2. **Multiplication par un réel non nul** :
   Si $f = o(g)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $f = o(\lambda g)$ et $\lambda f = o(g)$.
3. **Somme de petits o d'une même fonction** :
   Si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$, alors $f_1 + f_2 = o(g)$.
4. **Produit** :
   Si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$, alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.
   Si $f = o(g)$, alors $fh = o(gh)$.
5. **Composition à droite** :
   Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$, alors $f \circ h \underset{b}{=} o(g \circ h)$.

Remarque

La composition à droite s'interprètre comme un changement de variables. Voici deux exemples :

• Pour comparer $\sqrt{\ln x}$ et $\ln x$ au voisinage de $+\infty$, on pose $u = h(x) = \ln x$:
on a $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ et $\sqrt{x} \underset{+\infty}{=} o(x)$, alors $\sqrt{\ln x} \underset{+\infty}{=} o(\ln x)$.

• Pour comparer $e^{\frac{1}{x}}$ et $\frac{1}{x}$ au voisinage de 0^+, on pose $u = h(x) = \frac{1}{x}$:
on a $\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$ et $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$, alors $\frac{1}{x} \underset{0^+}{=} o(e^{\frac{1}{x}})$.

Opérations interdites !

1. Il est interdit d'additionner des relations de négligeabilité membre à membre. Les égalités $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ n'entrainent pas que $f_1 + f_2 = o(g_1 + g_2)$.
   Par exemple, $x - 1 \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ et $1 \underset{+\infty}{=} o(1 - x^2)$, mais $x \underset{+\infty}{\neq} o(1)$.
2. Il est interdit de composer une relation de négligeabilité par la gauche. Si $f = o(g)$, on n'a pas forcément $f \circ f = o(h \circ g)$.
   Par exemple, $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$, mais $\dfrac{1}{\ln x} \underset{+\infty}{\neq} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi, on ne peut pas composer par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par la gauche.

Théorème :Croissances comparées usuelles

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Au voisinage de $+\infty$:

1. Si $a < b$, alors $x^a \underset{+\infty}{=} o(x^b)$.
2. Si $0 < a < b$, alors $a^x \underset{+\infty}{=} o(b^x)$.
3. Si $a > 0$, alors $(\ln x)^b \underset{+\infty}{=} o(x^a)$.
4. Si $a > 0$, alors $x^b \underset{+\infty}{=} o(e^{ax})$.

Au voisinage de 0 :

1. Si $a < b$, alors $x^b \underset{0}{=} o(x^a)$.
2. Si $a > 0$, alors $x^a \underset{0}{=} o(|\ln x|^b)$.

Domination

Definition

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions $\mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}(a)$ sauf éventuellement en a, avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est dominée par g au voisinage de a si la fonction f/g est bornée au voisinage de a.
On note dans ce cas $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ et on lit « f est un grand $\mathcal{O}$ de g au voisinage de a ».

Exemples

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} \mathcal{O}(1), \qquad x^2 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x), \qquad 2x^2 \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(x^2), \qquad x^2 \underset{0}{=} \mathcal{O}(x).$$

Remarque

$f \underset{a}{=} \mathcal{O}(1) \Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a.

Proposition : Opérations sur les grand $\mathcal{O}$

Toutes les opérations énoncées pour les petits o restent valables pour les grands $\mathcal{O}$.

Opérations interdites !

Les opérations interdites pour les petits o (additionner membre à membre et composition par la gauche) restent interdites pour les grands $\mathcal{O}$.

Equivalence

Definition

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions $\mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur $\mathcal{V}(a)$ sauf éventuellement en a, avec dans ce cas $f(a) = 0$.
On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note dans ce cas $f \underset{a}{\sim} g$.

Remarque importante

Ne jamais écrire $f \sim 0$ car la fonction nulle ne vérifie pas les conditions de la définition.

Remarque

Dans la suite, pour alléger les énoncés, on notera parfois tout court $f \underset{a}{\sim} g$ et on supposera dans ce cas que les hypothèses dans la définition précédente sont satisfaites.

Exemples

$x + x^2 \underset{0}{\sim} x, \qquad x^3 + x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^3.$

Definition

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dit que $(u_n)n$ est équivalente à $(v_n)_n$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note dans ce cas $u_n \sim v_n$.

Exemples

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}, \qquad 3^n + 2^n \sim 3^n.$$

Proposition : Equivalents usuels

• Tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de $\pm\infty$.
• Tout polynôme est équivalent à son terme de plus petit degré au voisinage de 0.
• Si f admet un développement limité au voisinage de 0, alors f est équivalente au terme non nul de plus faible ordre au voisinage de 0.

1/ $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

2/ $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

3/ $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

4/ $\sin x \underset{0}{\sim} x$

5/ $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

6/ $\tan x \underset{0}{\sim} x$

7/ $\arcsin x \underset{0}{\sim} x$

8/ $\arctan x \underset{0}{\sim} x$

9/ $\mathrm{sh}\ x \underset{0}{\sim} x$

10/ $\mathrm{ch}\ x - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

11/ $\mathrm{th}\ x \sim x$

Proposition

La relation "est équivalente à " est une relation d'équivalence : pour toutes fonctions f, g et h, on a

- Réflexivité : $f \underset{a}{\sim} f$
- Symétrie : si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$
- Transitivité : si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Il s'agit d'une vérification directe.

Proposition

1. Lien limites/équivalence :
   - Pour tout $\ell \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to a} = \ell \Leftrightarrow f \underset{a}{\sim} \ell$.
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors soit f et g ont toutes les deux une limite en a, en l'occurence la mà$^{\text{a}}$me, soit aucune de ces deux fonctions ne possà¨de de limite en a.
2. Lien négligeabilité/équicalence :
   - $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$.
   - $f \underset{a}{=} o(g) \Leftrightarrow f + g \underset{a}{\sim} g$.
3. Signe et équivalence :
   - Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors f et g sont de mà$^{\text{a}}$me signe au voisinage de a.
   - Si f ne s'annule pas au voisinage de a et $f \underset{a}{\sim} g$, alors g ne s'annule pas au voisinage de a.

Proposition : Opérations sur les équivalences

1. **Produit** :
   Si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$, alors $fg \underset{a}{\sim} f_1 g_1$.
2. **Inverse** :
   Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g}$.
3. **Puissance** :
   Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f est strictement posistive au voisinage de a, alors pour tout réel α, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.
   Attention : α ne dépend pas de la variable x.
4. **Composition à droite** :
   Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$, alors $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ g$.

Opérations interdites !

1. Il est interdit d'additionner des équivalents : si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$, on n'a pas nécessairement $f + g \underset{a}{\sim} f_1 + g_1$.
   Par exemple, $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ et $-x + 3 \underset{+\infty}{\sim} -x + 1$, mais on n'a clairement pas $4 \underset{+\infty}{\sim} 1$.
2. Il est interdit de composer un équivalent par la gauche : si $f \underset{a}{\sim} g$, on n'a pas forcément $h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.
   Par exemple, $x \underset{+\infty}{\sim} x + \ln x$, mais on n'a pas $e^x \underset{+\infty}{\sim} xe^x$ en composant par $x \mapsto e^x$ par la gauche.

Exercice : Calculer les limites suivantes en utilisant les équivalences :

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3\sin(x) - \ln(1+x)}$$

2. $$\forall a, b > 0 \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$$

Equivalence et exponentielle

Remarque importante

On ne peut pas composer un équivalent à gauche par l'exponentielle : si $f \underset{a}{\sim} g$, on n'a pas forcément $e^f \underset{a}{\sim} e^g$.

Par exemple, $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$ mais on n'a pas $e^x \underset{+\infty}{\sim} e^{x+1}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x} = e \neq 1$.

Toutefois, sous certaines hypothèses, on peut composer à gauche par l'exponentielle :

Proposition

On a :

$$e^f \underset{a}{\sim} e^g \iff \lim_{x \to a} (f-g) = 0.$$

En effet, si $e^f \underset{a}{\sim} e^g$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1$, d'ou $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)-g(x)} = 1$.
En utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \ln x$ en 1, on a :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}\left(\ln\, e^{f(x)-g(x)}\right) = \ln\left(\lim_{x\to a} e^{f(x)-g(x)}\right) = \ln 1 = 0$$

Réciproquement, si $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, en utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto e^x$ en 0, on a :

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x\to a} e^{f(x)-g(x)} = e^{\lim(f(x)-g(x))} = e^0 = 1.$$

Equivalences et logarithme

Remarque importante

On ne peut pas composer un équivalent à gauche par le logarithme : si $f \underset{a}{\sim} g$ et f est strictement positive au voisinage de a, an n'a pas forcément $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.
Par exemple, $1+x \underset{0}{\sim} 1+2x$ mais on n'a pas $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln(1+2x)$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = 2 \neq 1$.
Toutefois, sous certaines conditions, on peut composer à gauche par le logarithme :

Proposition

Si $f \underset{a}{\sim} g$, avec f strictement positive au voisinage de a, et si la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln g(x)}$ est bornée au voisinage de a (en particulier, si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 1$), alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Lien entre négligeabilité, domination et équivalence

Proposition

- La négligeabilité entraine la domination :

$$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g).$$

- L'équivalence entraine la domination :

$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g).$$

En effet, il est clair que si la limite en a d'une fonction (ici f/g) vaut 0 ou 1, alors cette fonction est bornée au voisinage de a.

Exemple :

$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, alors $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, alors $\cos(x) \underset{0}{=} 1 + O(x^2)$

Exercice :

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + O(1)$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

Indication :

1-Rappelons que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

2-Posons les deux suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n),$$

montrer que les deux suites u_n et v_n sont adjacentes.