Introduction

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Le sujet de ce chapitre sont les sommes partielles S_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_1 &= u_0 + u_1 \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ \vdots & \qquad\qquad \ddots \\ S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \end{aligned}$$

Ce que l'on note plus généralement $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

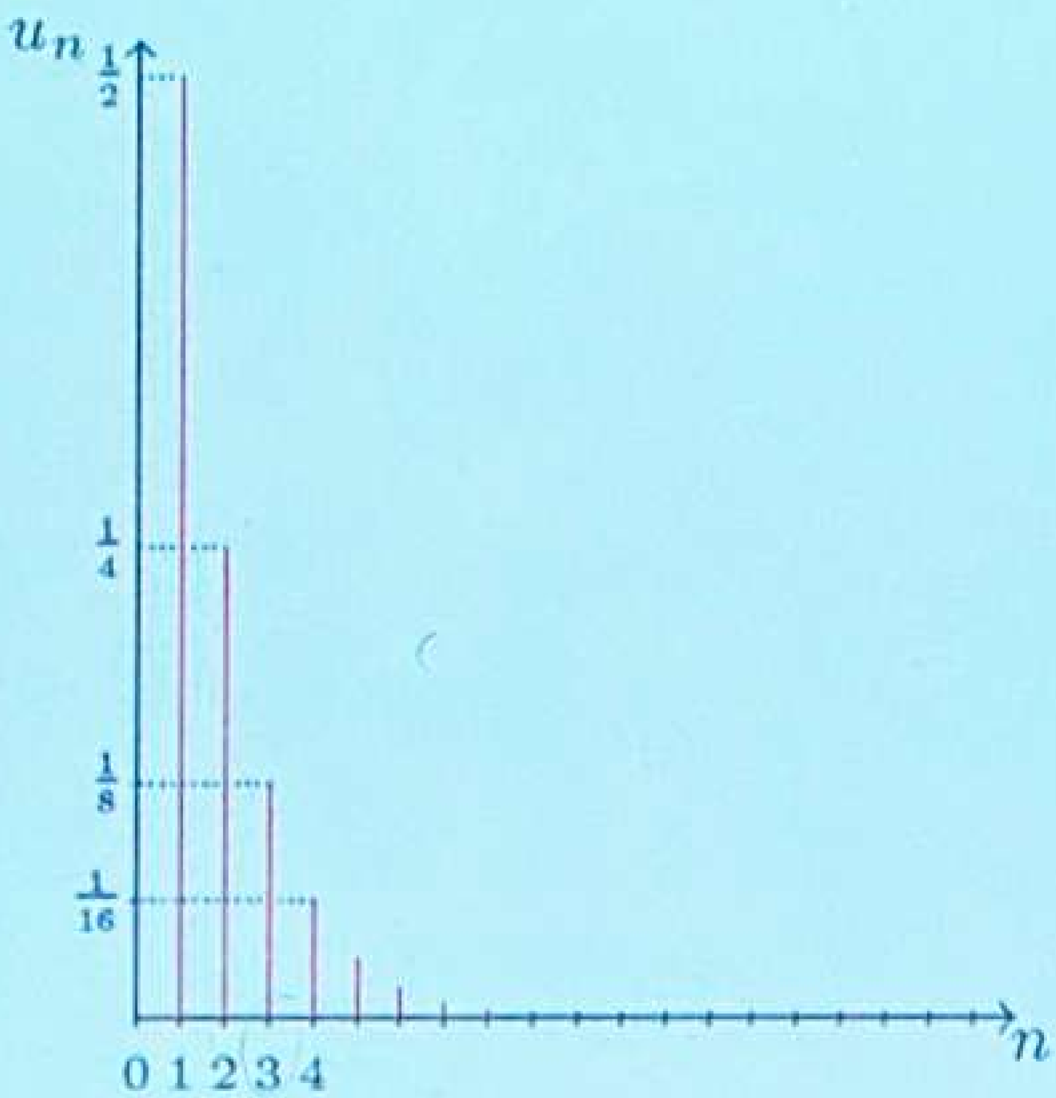
$$\boxed{\text{On dit que } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est la } \textbf{série} \text{ de terme général } u_n.}$$

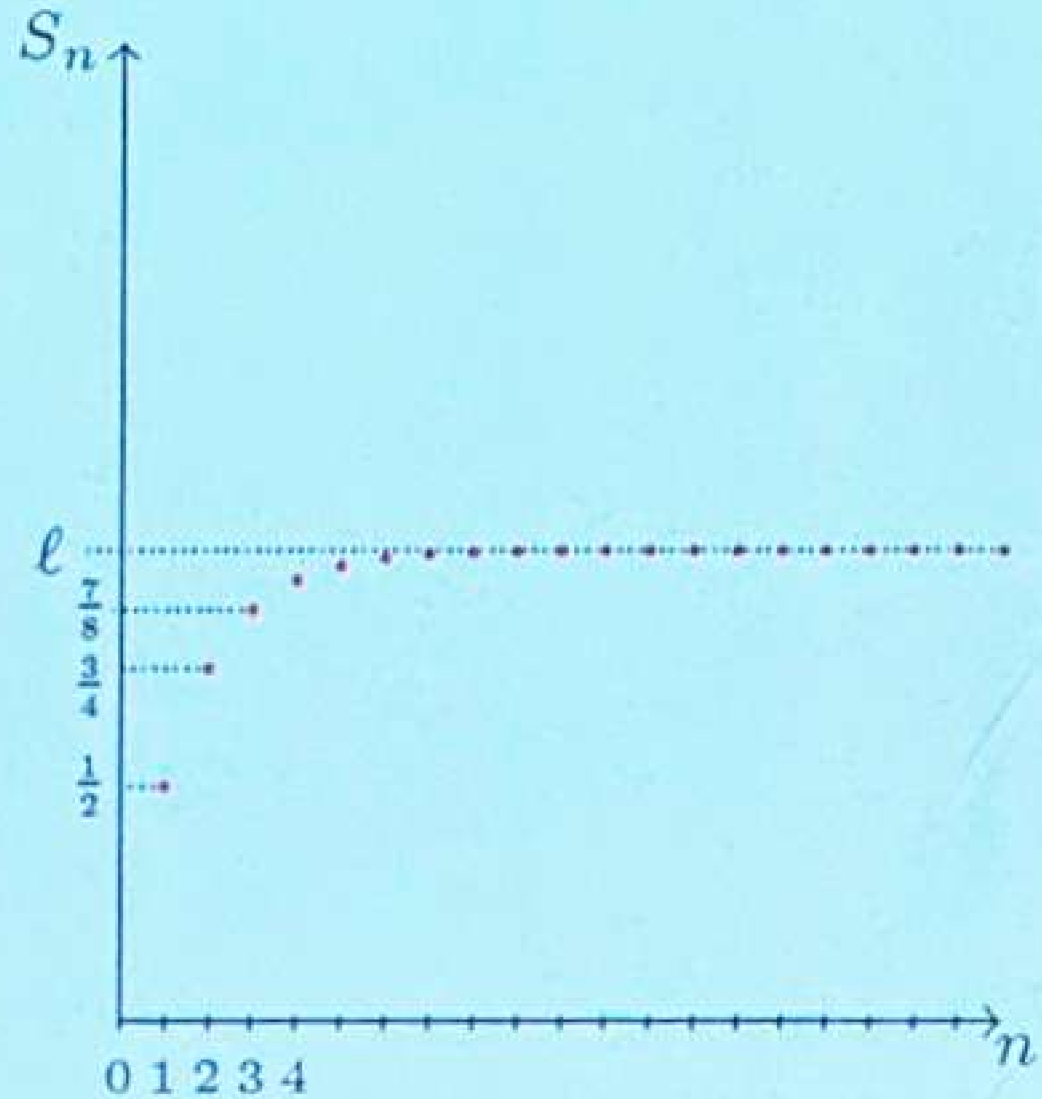
La question centrale de ce chapitre est :

Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ comment se comporte S_n quand $n \to \infty$?

Exemples introductifs

Exemple 1 : Soient $u_n := \dfrac{1}{2^n}$ et la série $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.



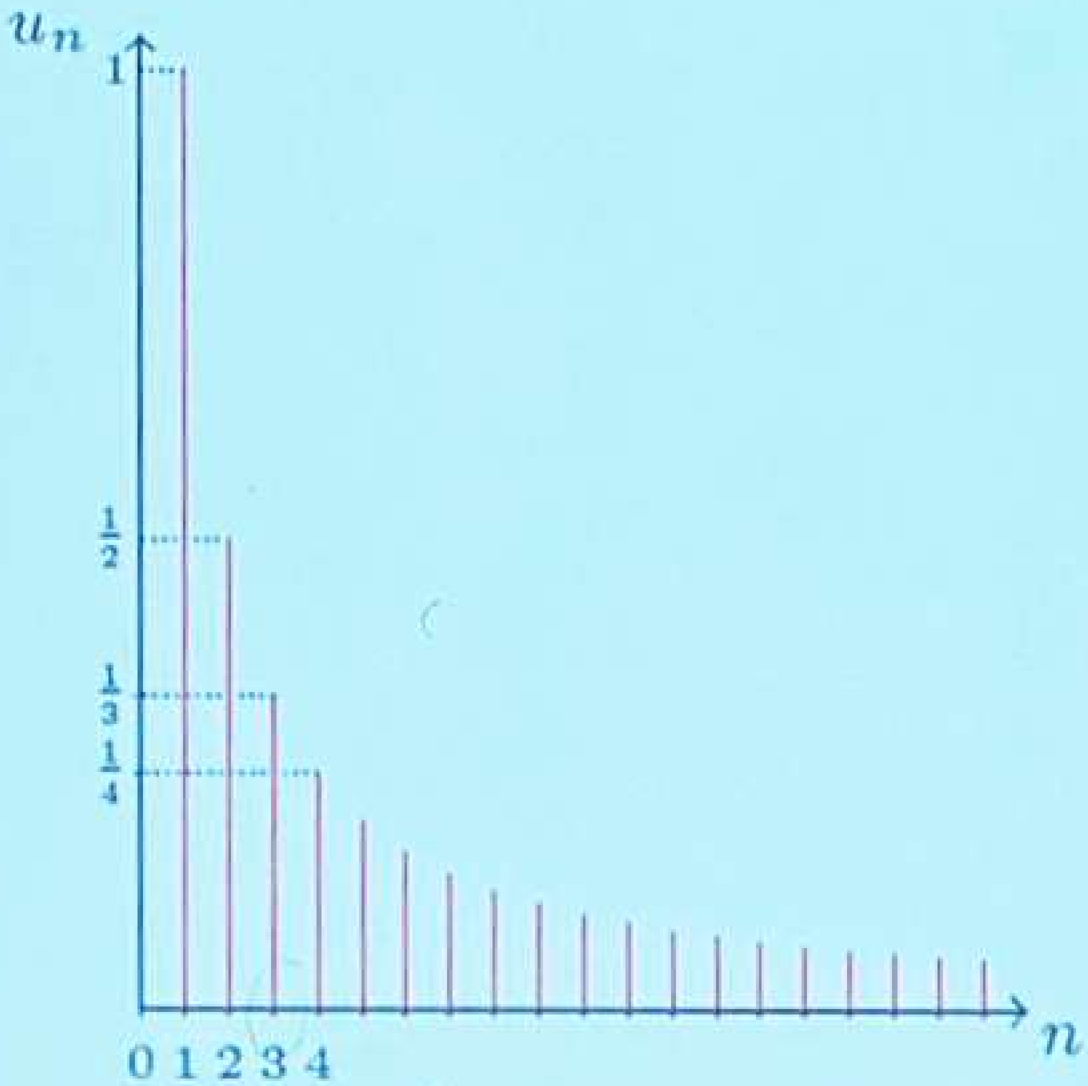


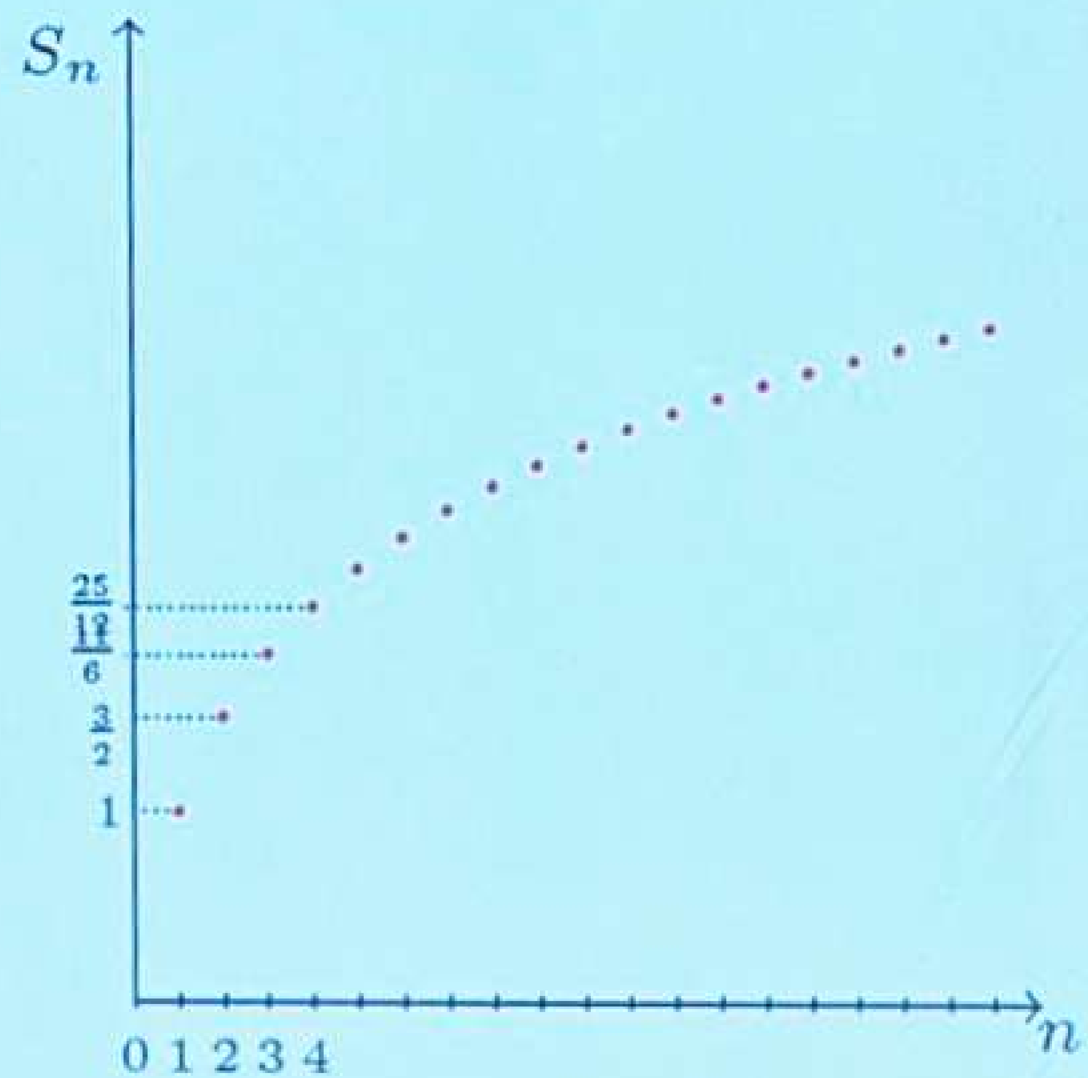
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, on sait déjà calculer ses sommes partielles !

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.\ \text{On en déduit } \lim_{n\to+\infty} S_n = \ell = 1.}$$

Exemples introductifs

Exemple 2 : Soient $u_n := \frac{1}{n}$ et la série $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.



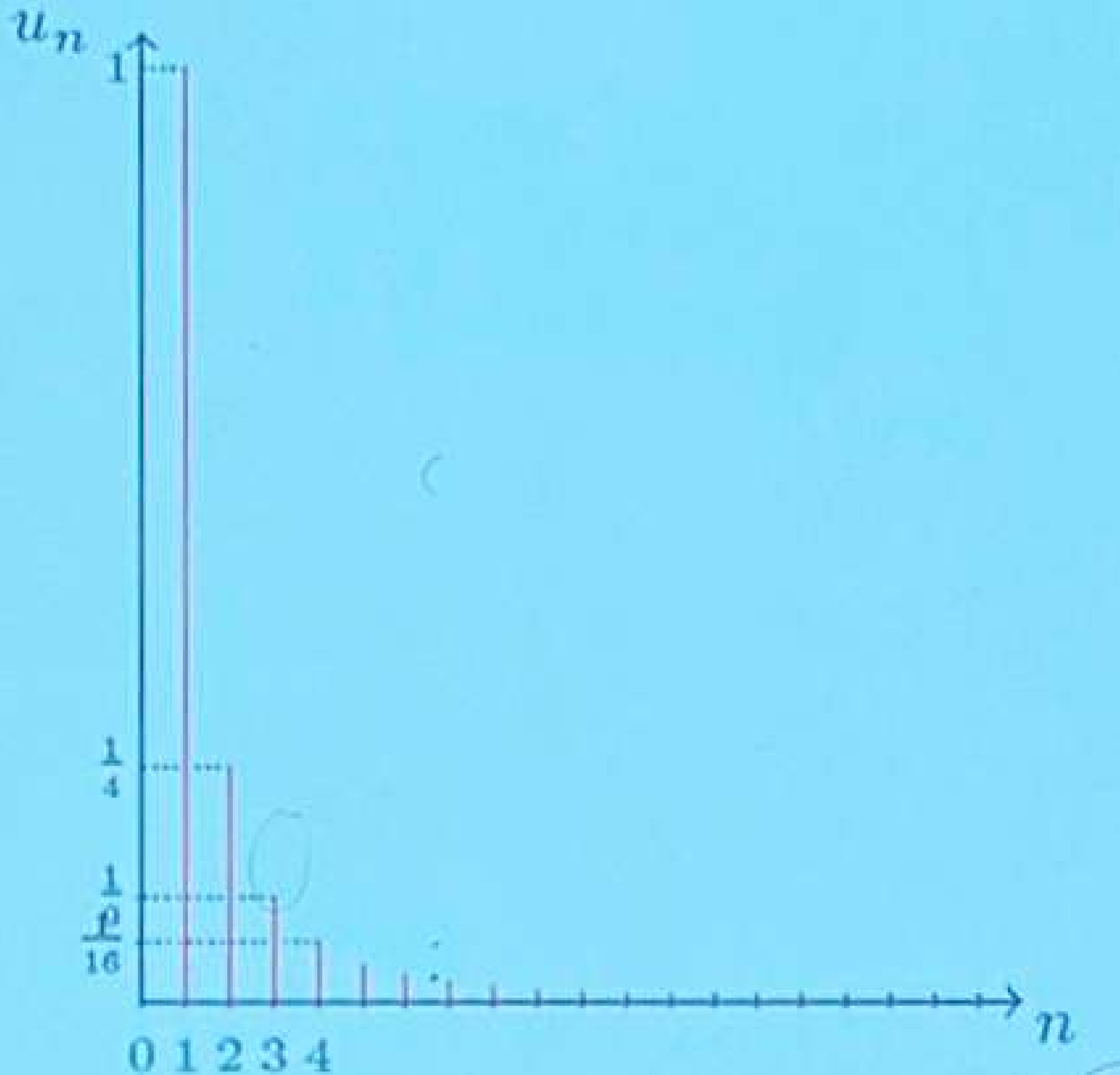


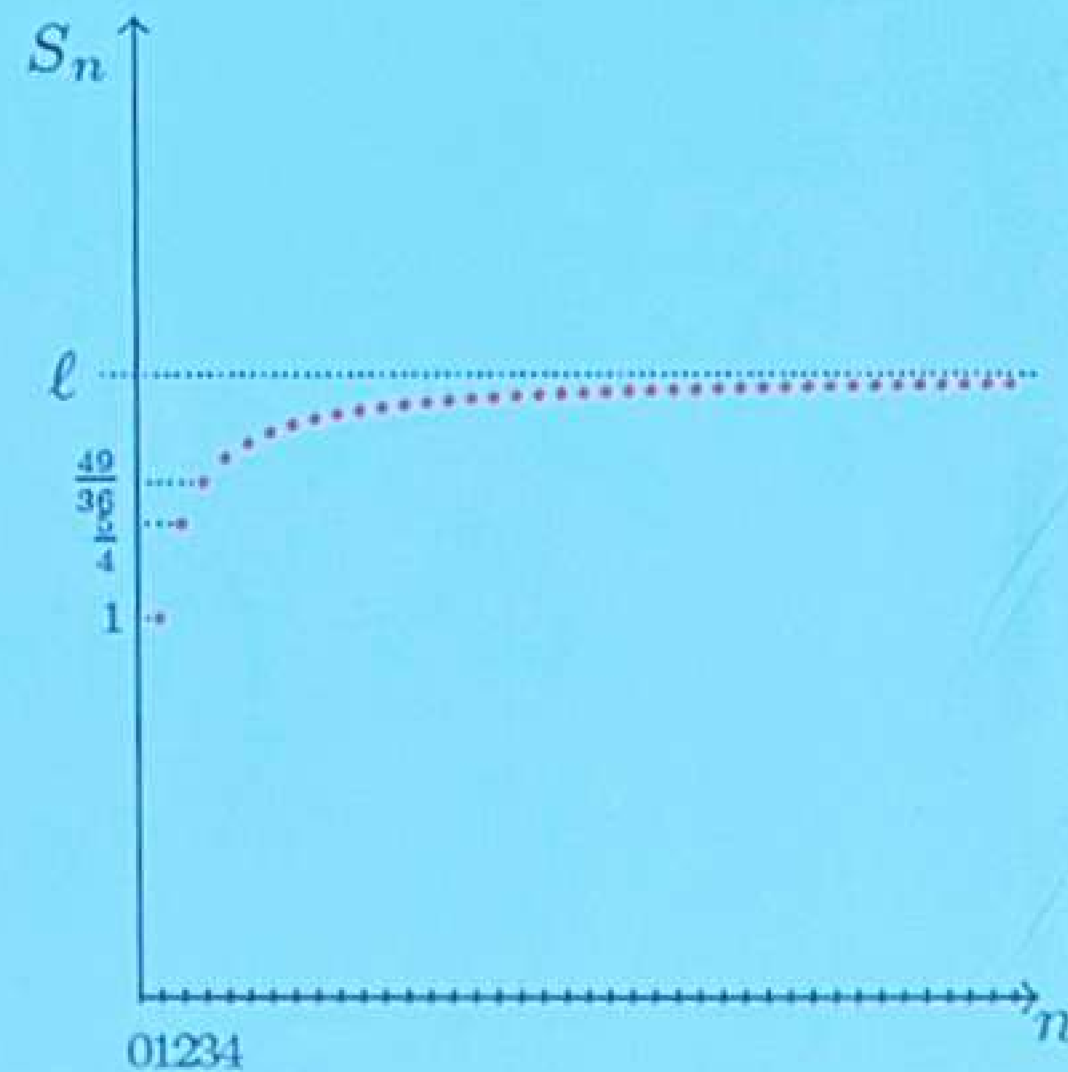
Dans ce cas, on peut montrer (on le fera) que

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty, \text{ et même que } S_n \sim \ln(n).}$$

Exemples introductifs

Exemple 3 : Soient $u_n := \frac{1}{n^2}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.





Dans ce cas, $(S_n)_{n\geq 1}$ semble **converger** vers une limite finie ℓ.

Chapitre 1 : Généralités sur les séries

1) Introduction (slides)

2) Notions fondamentales

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On lui associe la suite (S_n) définie par

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

* La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n
* $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n.

Notation :

La série s'écrit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum u_n$, $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Def : Une série numérique est une série à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Si la suite (u_n) commence à $n = n_0$ on définit la série associée $\sum_{k \geq n_0} u_k$. , et sa somme partielle $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemples :

* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ série de terme général $u_n = n$.

$$\forall n \geq 0 \quad , \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

* $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, série de terme général $u_n = q^n$

$$\forall n \geq 0 \quad , \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, dite série harmonique.

$\forall n \geq 1 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (non calculable explicitement)

Proposition (Structure algébrique)

Opérations sur les séries :

* Addition : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n+v_n)$.

* Multiplication externe par $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n).$$

$(u_0+u_1+u_2)(v_0+v_1+v_2)$

* Multiplication interne (produit de Cauchy)

$u_0(v_2+v_1+v_0)+u_1(v_2+v_1+v_0)+u_3(v_2+v_1+v_0)$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right) \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n \quad \text{où } \forall n\in\mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

3) Notion de Convergence

Def : La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Dans ce cas, la limite de S_n est appelée Somme de la série

on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \left(= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n \right)$

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Def : On appelle nature d'une série le fait qu'elle est convergente ou divergente

On dit que 2 séries ont même nature si elles sont toutes les deux CV ou DV.

Remarque : La nature d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dépend uniquement du comportement de u_n quand $n \to +\infty$.

Par conséquent, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ont la même nature

Si elles convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.

Exemples :

* La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n$ est divergente

- La série $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge si $|q|<1$

diverge si $|q|\geq 1$.

Si $|q|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Série harmonique :

Def : On appelle série harmonique la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

et on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ses sommes partielles.

Théorème : La série harmonique diverge.

Preuve 1 (Raisonnement par l'absurde)

Remarques à propos de la suite (H_n).

* (H_n) est une suite de reels positifs : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 0$.

* (H_n) est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad H_{n+1} - H_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}_{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}} - \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

Notre raisonnement par l'absurde va chercher à contredire la propriété suivante

<u>Prop:</u> Si une suite converge vers une limite l alors toute

<u>sous-suite extraite</u> converge aussi vers l.

(u_n) une suite $\rightarrow (u_{\varphi(n)})$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante

<u>exple:</u> (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}) ...

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante, alors

$$H_{\varphi(n)} - H_n = \sum_{k=1}^{\varphi(n)} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)}.$$

Prenons $\varphi : n \mapsto 2n$

alors $H_{2n} - H_n = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{n+1}}^{\geq \frac{1}{2n}} + \overbrace{\frac{1}{n+2}}^{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \overbrace{\frac{1}{2n}}^{\geq 1/2n}}_{2n-(n+1)+1 = n \text{ termes}} \geq \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}.$

$n = 4$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 4 \times \frac{1}{8}$

Raisonnement.

Si la série harmonique converge, i.e. si (H_n) converge.

Notons S sa limite : $\lim_{n \to +\infty} H_n = S$.

alors par la propriété précédente, la sous-suite (H_{2n}) converge aussi vers S.

donc $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} H_{2n} - \lim_{n \to +\infty} H_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow S - S = 0 \geq \frac{1}{2}$ absurde.

Donc la série harmonique diverge.

Raisonnement par l'absurde

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Si (H_n) converge alors

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = l = \lim_{n\to+\infty} H_{2n}$$

Or $\forall n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$

→ absurde donc (H_n) diverge

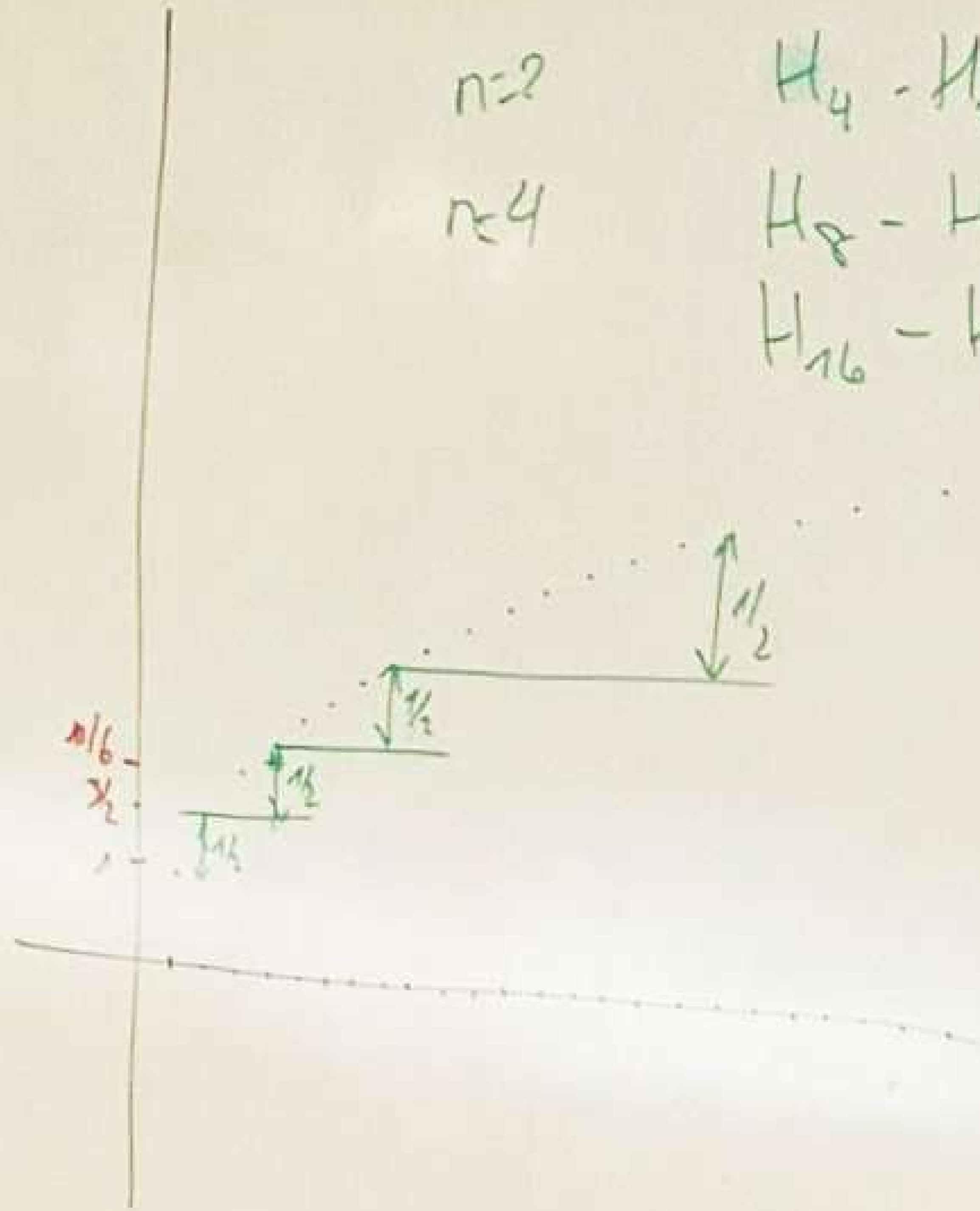
ie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

$n=1$ $H_2 - H_1 \geq 1/2$

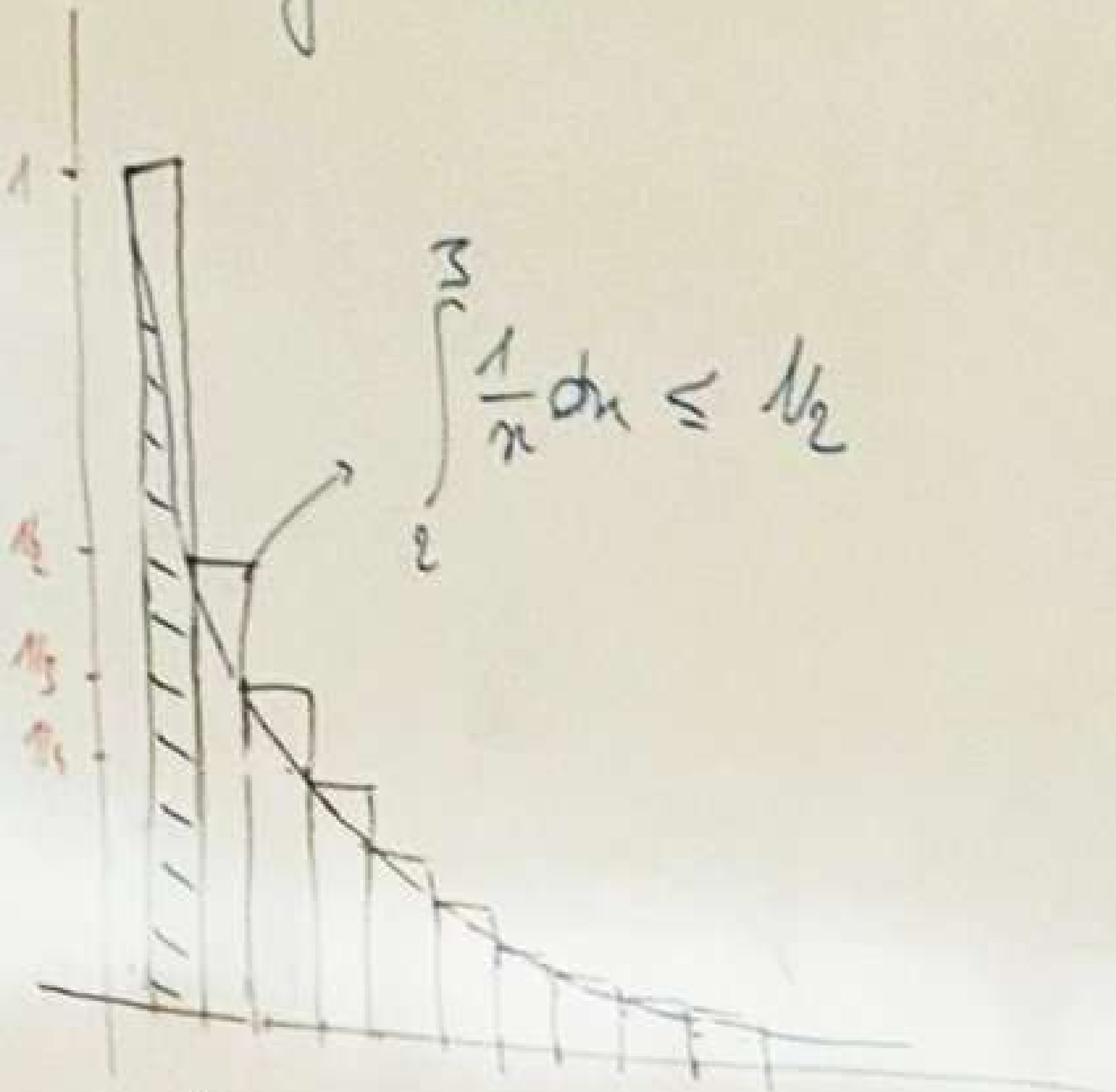
$n=2$ $H_4 - H_2 \geq 1/2$

$n=4$ $H_8 - H_4 \geq 1/2$

$H_{16} - H_8 \geq 1/2$



$f(x) = \frac{1}{x}$



$$\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx \leq 1/2$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leq 1$$

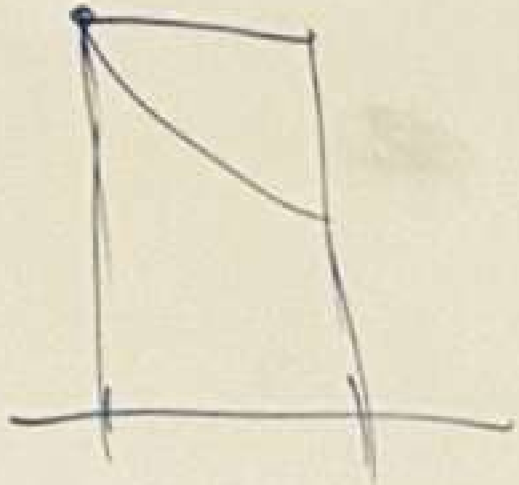
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Raisonnement sur les aires
(comparaison série-intégrale)

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$

On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \times (k+1-k) = \frac{1}{k}$$



On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx}_{\overset{\text{Chasles}}{=} \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or $\displaystyle\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_{1}^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Reste d'une série numérique

Déf : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est une série numérique convergente, on appelle Reste d'ordre n et on note R_n, le terme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

Remarque :

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = l$ alors on a toujours

$\forall n \in \mathbb{N}$ $$S_n = l - R_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k .$$

- On a toujours $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$

- On peut voir le reste comme une somme de la série $\sum_{k \geq n+1} u_k$.

Condition nécessaire de convergence

Théorème : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Preuve : Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad S_n - S_{n-1} = u_n$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n - \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0$.

Corollaire : Si $u_n \not\to 0$ alors $\sum u_n$ diverge.

Def : On dit qu'une série numérique diverge grossièrement lorsque son terme général ne tend pas vers 0. $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0\right)$

Exemple :
- La série $\sum\limits_{n \geq 0} n$ diverge grossièrement (DVG)
- La série $\sum\limits_{n \geq 0} q^n$:
  - si $|q| < 1$, $\sum q^n$ converge
  - Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ donc $\sum q^n$ DVG
  - Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ donc $\sum q^n$ DVG
  - Si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite donc $\sum q^n$ DVG.

- La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (pas grossièrement).

Attention : la réciproque du théorème est fausse

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge}$$

<u>Prop</u> : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$

donc $\sum (u_n + \lambda v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Structure algébrique

+	CV	DV
CV	CV	DV
DV	DV	?

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CV alors $\sum (u_n+v_n)$ CV

Si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV alors $\sum (u_n+v_n)$ DV

Exemple :

& $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n}\right)$ DV (car CV + DV)

& $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$ DV (DV + DV)

& $\sum_{n\geq 1} \left(1 + (-1)\right)$ CV (DVG + DVG)

Prop : (Positivité) Soit $\sum u_n$ une série CV.

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$.

Prop : Si $\sum u_n$ CV et $\forall n \geq 0$ $u_n \geq 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Prop : Si $\sum u_n$ est une série à valeur complexe : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + i b_n$

alors $\sum u_n$ CV si et seulement si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent

dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Rappels : Comparaison asymptotique de suites.

On considère (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers 0

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

1) Domination (au plus un multiple de, au plus à la même vitesse)

Déf : On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$

si il existe une suite bornée (λ_n) telle que

pour tout n assez grand : $u_n = \lambda_n v_n$.

Rappels : Comparaison asymptotique de suites.

On considère (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers 0

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

1) Domination (au plus un multiple de, au plus à la même vitesse)

Déf : On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$

si il existe une suite bornée (λ_n) telle que

$$\underbrace{\text{pour tout } n \text{ assez grand}}_{\exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0 :} : u_n = \lambda_n v_n.$$

Si on note $M = \sup_{n \geq n_0} |\lambda_n|$ alors on a $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \quad u_n \leq M v_n$, $\quad (|u_n| \leq M |v_n|)$

Corollaire :

Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ alors $\sup_{n \geq n_0} \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < +\infty$

2) Négligeabilité (négligeable devant, vitesse de CV plus rapide)

Def : On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$

si il existe une suite (ε_n) qui tend vers 0 $\left(\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0\right)$

pour tout n assez grand $u_n = \varepsilon_n v_n$.

On note aussi $u_n \ll v_n$

3) Equivalence (exactement à la même vitesse)

<u>Déf</u>: On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si il existe une suite (x_n) qui tend vers 1 $\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = 1\right)$ telle que pour tout n assez grand $u_n = x_n v_n$

<u>Corollaire</u>: Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors

- $\exists n_0, \lambda, \Lambda > 0$ tels que $\forall n \geq n_0$ $\lambda v_n \leq u_n \leq \Lambda v_n$
- $\exists n_0, \mu, M > 0$ tels que $\forall n \geq n_0$ $\mu u_n \leq v_n \leq M u_n$

Preuve : $\lambda = \inf_{n \geq n_0} x_n$, $\Lambda = \sup_{n \geq n_0} x_n$

et pour $n_0 \geq \tilde{n}_0$ tel que $x_n \neq 0$ $\forall n \geq \tilde{n}_0$

$$\mu = \inf_{n \geq n_0} \frac{1}{x_n} \text{ et } M = \sup_{n \geq n_0} \frac{1}{x_n}.$$

Quelques Remarques

1) Dans les Relations Θ et O on peut se passer des constantes :

si $u_n = O(v_n)$ alors $\forall \lambda > 0$, $u_n = O(\lambda v_n)$.

2) Si (u_n) est négligeable alors elle est dominée

si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.

3) Les 3 relations sont transitives

Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$.

idem pour o et $\sim$.

4) Les 3 relations sont compatibles avec la multiplication

Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \text{et } a_n = O(b_n) \end{cases}$ alors $u_n a_n = O(v_n b_n)$.

idem pour o et $\sim$.

5) Ces 3 relations ne sont pas compatibles avec l'addition en général

$u_n = \Theta(v_n)$ et $a_n = \Theta(b_n)$ alors on n'a pas toujours $u_n + a_n = \Theta(v_n + b_n)$.

Exemple : $u_n = 3n+2$, $v_n = n+4$, $a_n = -n-2$, $b_n = -n+3$

On a bien $u_n = \Theta(v_n)$: $3n+2 = \Theta(n+4)$ $\left(= \Theta(n)\right)$

$a_n = \Theta(b)$: $-n-2 = \Theta(-n+3)$ $\left(= \Theta(-n)\right)$

mais

$u_n + a_n = 2n$

$v_n + b_n = 7$ or $2n \neq \Theta(7)$ $\left(= \Theta(1)\right)$

6) Une condition suffisante pour pouvoir additionner est que (v_n) et (w_n) soient de même signe constant à partir d'un certain rang.

En particulier si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim w_n$

et (w_n) de signe constant à partir d'un certain rang

alors $u_n + v_n \sim 2w_n$.

Comparaison usuelle.

1) Tout polynôme est équivalent en $n \to +\infty$ à son terme de plus haut degré

Exple : $u_n = -3n^5 + 8n^2 - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -3n^5$

$$v_n = \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} + \frac{7}{n^8} = 2n^{-2} - n^{-4} + 7n^{-8} \sim 2n^{-2} = \frac{2}{n^2}.$$

2) Tout polynôme est dominé par son terme de + haut degré et négligeable devant toute puissance plus grande.

Exple. $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > -2$.

5) Toute fct rationnelle est équivalente au ratio des termes de plus haut degré

Ex :

$$\frac{n^6 - 2n^3 + n}{2n^8 - n^2 + 2} \sim \frac{n^6}{2n^8} = \frac{1}{2n^2}.$$

En pratique :

Pour étudier la CV ou DV de $\sum u_n$ on va chercher un équivalent de (u_n) en $n \to +\infty$ sous la forme d'une puissance de n, d'exponentielle n et de logarithme de n.

Pour cela, on utilisera parfois des dev. limités :

Exple : $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} - 1$

on pose $f(x) = \sin(x) + \sqrt{1-x} - 1$ et on étudie le comportement de f quand $x \to 0$

En l'occurrence

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 - \frac{1}{2}x + o(x) - 1$$

$$= \frac{1}{2}x + o(x)$$

On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Partie 2 : Séries Numériques

Chapitre 2 : Séries numériques à termes positifs.

<u>Def</u> : On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série numérique à termes positifs (sntp) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

<u>Prop</u> : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une sntp alors la suite des sommes partielles associées $(S_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Preuve :

$\Rightarrow$) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ CV alors (S_n) converge par définition, donc (S_n) est bornée.

$\Leftarrow$) On sait que (S_n) est croissante car $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une sntp donc si (S_n) est majorée elle converge, i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ CV.

Prop : Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une sntp.

- Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ CV vers $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
  et dans ce cas $\forall n\in\mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} u_n \leq \ell$.
- Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ DV et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$

Preuve :

- (S_n) est une suite croissante, donc elle tend vers sa limite par valeurs inférieures
- (S_n) est croissante non-majorée donc elle tend vers $+\infty$.

Partie II, Séries Numériques

Chapitre 2 : Séries numériques à termes po..,

1) Théorèmes de comparaison

A) Théorème de majoration

Thm : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques à termes positifs.

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV

Preuve : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux sntp telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$.

La majoration est vraie pour les sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \quad \text{puisque } \forall k \in [\![0,n]\!] \; u_k \leq v_k.$$

La $\sum u_n$ étant à termes positifs sa suite des sommes partielles (S_n) est croissante et si $\sum v_n$ converge on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

La suite (S_n) est donc majorée par $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$,

par le lemme fondamental des sntp, on

conclut que $\sum u_n$ CV

Corollaire : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux sntp

. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV.

. Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n$ CV

B) Théorème de minoration

Thm : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n \leq u_n$ et $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n$ DV

preuve : Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq v_n \leq u_n$

alors $\sum_{k=0}^{n} v_n \leq \sum_{k=0}^{n} u_n = S_n$

Si $\sum v_n$ DV alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} v_n = +\infty$ donc

la suite (S_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$

On en déduit que $\sum u_n$ DV

Partie 2, Séries Numériques

Chapitre 2 : Séries numériques à termes po..

1) Théorèmes de comparaison

Corollaire : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux sntp

- Si $v_n = O(u_n)$ et $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n$ DV
- Si $v_n = o(u_n)$ et $\sum v_n$ DV alors $\sum u_n$ DV.

c) Théorème d'équivalence

Thm : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telles que

- $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$
- (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

preuve : Supposons que (v_n) est positive à partir d'un certain rang et que $u_n \sim v_n$,

alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda, \Lambda > 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad \lambda v_n \leq u_n \leq \Lambda v_n$$

* Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ CV alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \Lambda v_n$ CV aussi

donc, comme $\forall n \geq n_0$ $u_n \leq \Lambda v_n$, le théorème de majoration nous dit que $\sum u_n$ CV.

* $\sum v_n$ DV alors $\sum \lambda v_n$ DV aussi

et $\forall n \geq n_0$ $u_n \geq \lambda v_n$ donc

le théorème de minoration nous dit que

$\sum u_n$ DV

On a bien montré que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Si (v_n) est négative, la preuve est identique.

Partie II : Séries Numériques

Chapitre 2 : Séries numériques à termes po...

Exemple : Considérons $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{2n^3-n+1}$, $v_n = \dfrac{1}{n}$

u_n étant une fraction rationnelle : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{2n^3} = \dfrac{1}{2n}$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} v_n$ et $v_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$.

Or $\sum v_n$ est la série harmonique : elle diverge

Par le théorème d'équivalence, on en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Prop : (Sommation des équivalences)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques

telles que
* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
* (v_n) est de signe constant à partir d'un certain rang

* Si $\sum u_n$ CV alors les suites de restes sont équivalentes : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$
* Si $\sum u_n$ DV alors les sommes partielles sont équivalentes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_n$.

2) Séries de Référence

A- Séries géométriques

Thm: Soit $z \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

(Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

B- Séries de Riemann

Def: Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle série de Riemann la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

Thm:

Une série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve:

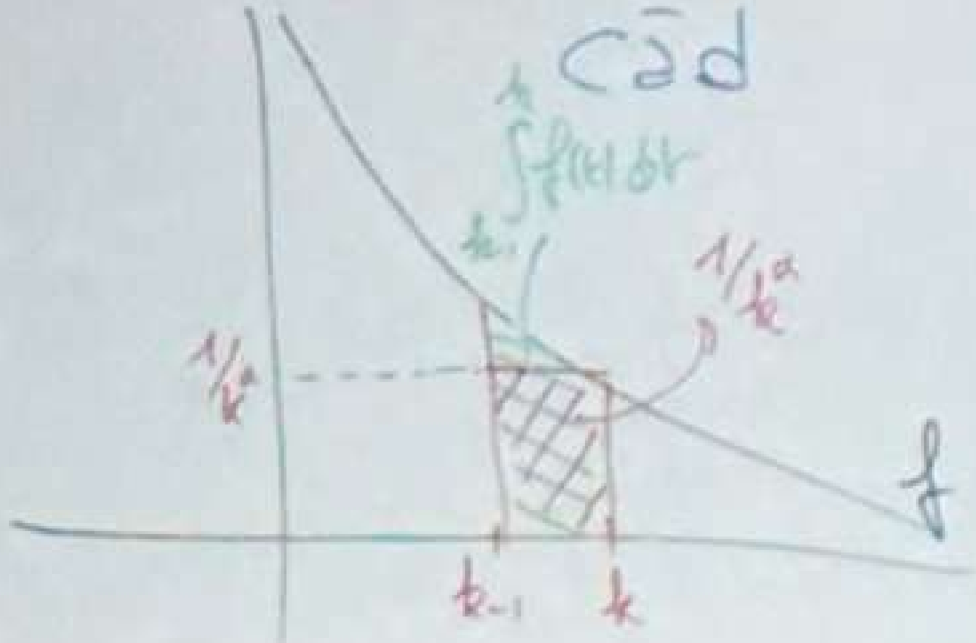
Pour $\alpha = 1$ on reconnaît la série harmonique qui est effectivement diverge

• Si $\alpha > 1$: Considérons $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.

Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\forall k \geq 2, \quad \forall t \in [k-1, k], \quad \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

on en déduit que $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$,



càd $\displaystyle\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$

Ceci étant vrai $\forall k \geq 2$ on en déduit que $\forall n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$$\leq \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n$$

$$\leq \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

où $\displaystyle\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}}_{\geq 0}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}_{\geq 0}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}$

On a montré que la suite des sommes partielles est majorée :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{k^\alpha} \geq 0$ $\forall k \geq 2$ donc par le lemme fondamental des sntp, la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ CV.

* Si $\alpha < 1$ alors $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

où $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont des sntp et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc par le théorème de minoration la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Prop : Utilisation des séries de Riemann.

Soit $\sum u_n$ est une SATP.

* Si $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$

alors $\sum u_n$ CV

* Si $\exists \alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$

alors $\sum u_n$ DV.

C- Séries de Bertrand

Thm : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

La série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$

converge si et seulement si

* $\alpha > 1$ $(\forall \beta \in \mathbb{R})$.

ou

* $\alpha = 1$, $\beta > 1$