

CC3
Électromagnétisme
18 Janvier 2024 — PréIng2

Durée : 1h30 minutes (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 16 pages et 20 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Complétez la page 9 (nom, prénom etc. . .) dès le début officiel de l'épreuve ;
4. Les détails des calculs demandés doivent être portés sur ces dernières feuilles à l'emplacement correspondant à la question ;
5. Dans les deux grilles, les cases correspondant à la bonne réponse doivent être remplies complètement au stylo noir ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse possible ;
7. Il n'y a de point négatif pour une mauvaise réponse que pour les questions de cours ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Données

Rotationnel d'un champ vectoriel \vec{U} , dans la base de coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\text{rot}\vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Questions de cours (5 points)

Question 1 (0.5 point)

En étudiant les plans de *symétrie pour la distribution de courant*, on trouve que la direction du champ magnétique \vec{B} en M est :

- A inclus dans tout plan Π de symétrie, passant par M .
 B celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M .
 C celle de la droite intersection d'au moins deux plans de symétrie, passant par M .
 D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 2 (0.5 point)

Le **théorème d'Ampère** relie le *champ magnétique* \vec{B} et l'*intensité* des courants I_i (comptés algébriquement) qui traversent toute surface ouverte S , s'appuyant sur un contour Γ . Il s'énonce :

- A $\oiint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_i I_i$ C $\oiint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \mu_0 \sum_i I_i$
 B $\oint_{\Gamma} \vec{B} \wedge \vec{dl} = \mu_0 \sum_i I_i$ D $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \sum_i I_i$
 E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 3 (1 point)

La **loi de Biot et Savart** permet de calculer le champ magnétique \vec{B} en M , pour un fil parcouru par un courant I . Elle s'énonce :

- A $\vec{B}(M) = \oint_{P \in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{MP}}{MP^2}$ C $\vec{B}(M) = \oint_{P \in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^2}$
 B $\vec{B}(M) = \oint_{P \in \text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$ D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 4 (0.5 point)

En étudiant les plans d'*anti-symétrie pour la distribution de courant*, on trouve que le vecteur champ magnétique \vec{B} en M

- A a pour direction celle de la droite orthogonale à un plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.
- B est inclus dans tout plan Π' d'anti-symétrie, passant par M.
- C a pour direction celle de la droite intersection d'un plan de symétrie et d'un plan d'anti-symétrie, passant par M.
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 5 (0.5 point)

Soit c la vitesse de la lumière dans le vide. Elle s'exprime en fonction des deux constantes ε_0 et μ_0 par :

- A $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$
- B $c = \varepsilon_0 \mu_0$
- C $c = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$
- D $c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 6 (1 point)

Soient la densité de courant \vec{j} et la densité volumique de charges ρ , l'équation locale de conservation de la charge électrique s'écrit alors :

- A $\text{div } \vec{j} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- B $\text{div } \vec{j} - \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- C $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- D $\text{div } \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 7 (1 point)

Les quatre équations de Maxwell pour le champ électromagnétique sont :

- A $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\text{div } \vec{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- B $\text{div } \vec{E} = \rho$; $\text{div } \vec{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- C $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\text{div } \vec{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Cylindre parcouru par un courant (7 points)

On considère un cylindre plein infiniment long, d'axe (Oz) et de rayon R . Il est parcouru par un courant I constant et uniforme suivant sa longueur. On repère un point M de l'espace dans la base de coordonnées cylindriques : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On cherche l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en un point M .

Question 8 (0.5 point)

La densité de courant surfacique \vec{j} s'écrit en fonction de I :

A $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_r$

D $\vec{j} = \frac{I}{\pi r^2} \vec{u}_z$

B $\vec{j} = \frac{I}{\pi r^2} \vec{u}_z$

E Aucune des réponses précédentes n'est correcte

$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z$

Question 9 (0.5 point)

En regardant les invariances, on constate que $B(r, \theta, z)$ ne dépend que de :

A φ **B** r **C** z **D** θ **E** Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 10 (1 point)

Du fait des plans de symétries, le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ s'écrit :

A $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_r$ et $\vec{B}(0) \neq \vec{0}$.

D $\vec{B}(M) = B(\theta) \vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(0) = \vec{0}$.

B $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(0) \neq \vec{0}$.

$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$ et $\vec{B}(0) = \vec{0}$.

C $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_z$ et $\vec{B}(0) \neq \vec{0}$.

F Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 11 (1 point)

En utilisant une des équations de Maxwell, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r \leq R$:

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{u}_\theta$

B $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

C $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_z$

D $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{u}_z$

E Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 12 (1 point)

En utilisant une des équations de Maxwell, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r \geq R$:

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{u}_z$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{u}_\theta$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_z$

Aucune des réponses précédentes n'est correcte

Question 13 (3 points)

En utilisant le *théorème d'Ampère*, démontrer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r \geq R$, en détaillant les calculs (symétries, invariances, contour d'Ampère ...).

Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Solénoïde infini parcouru par un courant (4 points)

On considère un solénoïde de rayon a parcouru par un courant d'intensité I constant et uniforme, et dont la longueur peut être considérée comme infinie. Son axe Oz coïncide avec celui du repère cylindrique $\mathcal{R} = \{0; (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)\}$. Il comporte n spires par unité de longueur.

On connaît le potentiel vecteur \vec{A} en un point quelconque de l'espace défini par sa distance r à l'axe Oz :

- si $r < a$, $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} r \vec{u}_\theta$
- si $r > a$, $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2r} a^2 \vec{u}_\theta$

On cherche l'expression du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace.

Question 14 (1 point)

Alors, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r < a$:

- A $\vec{B}(M) = \vec{0}$
- B $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{r} \vec{u}_z$
- C $\vec{B}(M) = \mu_0 n I r \vec{u}_z$
- D $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 15 (1 point)

Démontrer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r < a$ en détaillant les calculs (potentiel vecteur \vec{A} puis calcul de $\vec{B}(M)$...).

Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Question 16 (1 point)

Alors, on peut écrire le vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r > a$:

- A $\vec{B}(M) = \vec{0}$
- B $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z$
- C $\vec{B}(M) = \mu_0 n I r \vec{u}_z$
- D $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{r} \vec{u}_z$
- E *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 17 (1 point)

Démontrer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour $r > a$ en détaillant les calculs (potentiel vecteur \vec{A} puis calcul de $\vec{B}(M)$...).

Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

CORRECTION

Électromagnétisme - PréIng2 - CC3 - 2023/2024

NOM :
Prénom :
n° Groupe :
Nom du chargé de TD :

CODAGE DU N° ÉTUDIANT *HORIZONTALEMENT*
(DANS LE SENS DE LECTURE)

Premier chiffre du n° étudiant

Dernier chiffre du n° étudiant

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE
→
DU N° ÉTUDIANT

CORRECTION

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.

La copie ne sera corrigée que si :

- elle comporte vos nom, prénom et groupe ;
- les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;
- la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.

Question 1 : A B C D

Question 2 : A B C D E

Question 3 : A B C D

Question 4 : A B C D

Question 5 : A B C D E

Question 6 : A B C D E

Question 7 : A B C D

Question 8 : A B C D E

Question 9 : A B C D E

Question 10 : A B C D E F

Question 11 : A B C D E

Question 12 : A B C D E

Question 14 : A B C D E

Question 16 : A B C D E

Question 18 : A B C D E

Question 19 : A B C D E

3 points

Question 13 :

Cylindre parcouru par un courant

Réservé à l'enseignant(e)

① Invariances :

↳ fil infini : même distribution de courant si on fait une translation selon (Oz)

⇒ $B(r, \theta, z)$ indépendant de z

↳ fil : distribution de courant invariante par rotation autour de (Oz)

⇒ $B(r, \theta, z)$ indépendant de θ

0,5 pt

② Symétrie :

• plan $\Pi^* = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ plan d'antisymétrie → $B \in \Pi^*$

• plan $\Pi = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ plan de symétrie → $\vec{B} \perp \Pi$ donc

\vec{B} suivant \vec{e}_θ

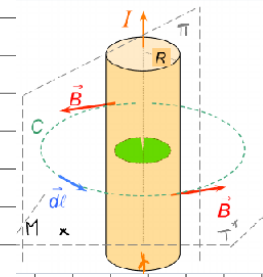
0,5 pt

⇒ $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$

ligne de champ = cercle de rayon r et

d'axe (Oz)

contour C



Théorème d'Ampère

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enclosés} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

↳ r constant

2π

2π

0

0

↳ $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} B(r) \vec{e}_\theta \cdot r d\theta \vec{e}_\theta = r B(r) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r B(r)$

1 pt

• $r > R$: $I_{enclosés} = I = j \pi R^2$ ⇒

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

1 pt

1 point

Question 15 : Champ magnétique à l'intérieur du solénoïde infini

Réservé à l'enseignant(e)

$$\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

• pour $r < a$: $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$

$$\vec{A} = \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\theta = \frac{\mu_0 n I}{2} r \\ A_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} = A_\theta + r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 n I}{2} r + r \frac{\mu_0 n I}{2} = \mu_0 n I r$$

donc $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z = \mu_0 n I \vec{u}_z$

0,25 pt

0,25 pt

0,5 pt

1 point

CORRECTION

Question 17 : Champ magnétique à l'extérieur du solénoïde infini

Réservé à l'enseignant(e)

• pour $r > a$: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

$$\vec{A} = \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\theta = \frac{\mu_0 n I}{2r} a^2 \\ A_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A_r}{\partial z} = \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} = \frac{\partial \left(\frac{\mu_0 n I}{2} a^2 \right)}{\partial r} = 0$$

0,25 pt

0,25 pt

donc $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z = \vec{0}$

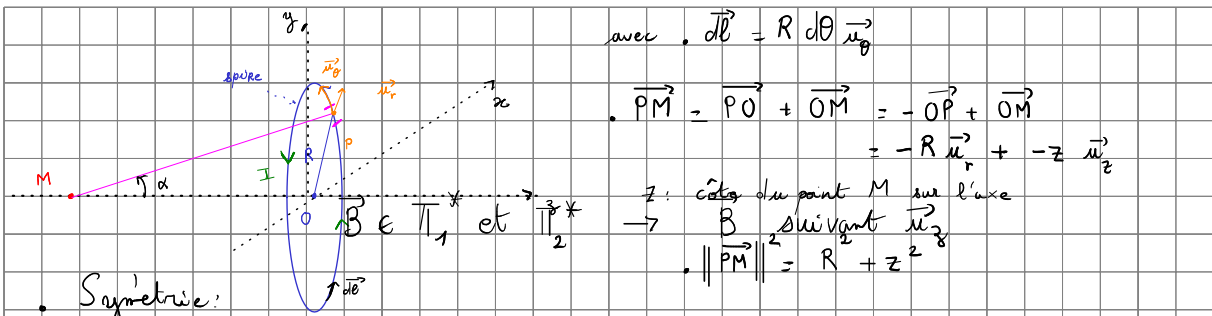
0,5 pt

Question 20 :

2 points

Spire

Réservé à l'enseignant(e)



$$\text{avec } d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -\vec{OP} + \vec{OM} = -R \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

$$z: \text{cote du point M sur l'axe} \rightarrow \vec{B} \text{ suivant } \vec{u}_z$$

$$\|\vec{PM}\| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Symétrie:

$$\Pi_1^* = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) \text{ et } \Pi_2^* = (M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z): \text{plans d'antisymétrie} \Rightarrow \vec{B} \text{ suivant } \vec{u}_z$$

Invariance: invariante par rotation selon Oz : \vec{B} ind. de θ
M sur l'axe $\Rightarrow r=0$

$$\hookrightarrow \vec{B} = B(0, z) \vec{u}_z = B(z) \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \int_{\text{spire}} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

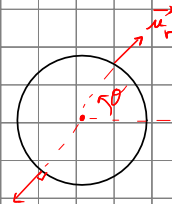
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{R d\theta \vec{u}_\theta \wedge (-z \vec{u}_z - R \vec{u}_r)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_r$ $\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -\vec{u}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \left[-R \int_{\text{spire}} z d\theta \vec{u}_r + R^2 \int_{\text{spire}} d\theta \vec{u}_z \right] = \frac{\mu_0 I}{24\pi} \frac{2\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$I_2 = \int_{\text{spire}} d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

$$\vec{u}_r \text{ dépend de } \theta: \vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y$$



$$I_1 = \int_{\text{spire}} d\theta \vec{u}_r = \left(\int_{\text{spire}} d\theta \cos\theta \right) \vec{u}_x + \left(\int_{\text{spire}} d\theta \sin\theta \right) \vec{u}_y = \vec{u}_x \underbrace{\left[\sin\theta \right]_0^{2\pi}}_{=0} - \vec{u}_y \underbrace{\left[\cos\theta \right]_0^{2\pi}}_{1-1=0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

$$\sin^3 \alpha$$

$$R$$

0,5 pt

0,5 pt

0,5 pt

0,5 pt

CORRECTION

