CC1

Électromagnétisme

09 Novembre 2023 — PréIng2

Durée : 1h30 minutes (2h en cas de tiers temps)

Sont interdits :

- les documents ;
- tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
- les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. Vérifiez que le sujet est composé de 14 pages et 24 questions ;
2. Seules les dernières feuilles doivent être rendues ;
3. Complétez avec vos nom, prénom et groupe ces dernières feuilles dès le début officiel de l'épreuve ;
4. Les détails des calculs demandés doivent être portés sur ces dernières feuilles à l'emplacement correspondant à la question ;
5. Dans la grille, les cases correspondant à la bonne réponse doivent être remplies complètement au stylo noir ;
6. Chaque question ne comporte qu'une seule réponse possible ;
7. Il n'y a pas de point négatif pour une mauvaise réponse ;
8. Une case simplement cochée ne sera pas comptabilisée.

Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (5 points)

Question 1 (0.5 point)
Le *volume élémentaire en coordonnées sphériques* s'écrit :

- [A] $dV = r^2\ dr\ d\theta\ d\varphi$
- ■ $dV = r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$
- [C] $dV = r\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 2 (0.5 point)
En s'aidant de la figure 1 sur la *loi de Coulomb*, donner l'expression de la force $\overrightarrow{F}_{1/2}$ exercée par la charge ponctuelle q_1 sur la charge ponctuelle q_2, située à la distance r (k constante positive) :

- [A] $\overrightarrow{F}_{2/1} = k\left(\frac{q_1q_2}{r^2}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
- [B] $\overrightarrow{F}_{1/2} = k\left(\frac{q_1q_2}{r^3}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
- ■ $\overrightarrow{F}_{1/2} = k\left(\frac{q_1q_2}{r^2}\right)\overrightarrow{u}_{1\to2}$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 3 (0.5 point)
Le facteur k dans la loi de Coulomb dépend du milieu. Et dans le vide, il vaut :

- [A] $k = 1/\left(4\pi\epsilon\right)$
- ■ $k = 1/\left(4\pi\epsilon_0\right)$
- [C] $k = 1/\left(\pi\epsilon_0\right)$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 4 (0.5 point)
L'unité de la densité surfacique de charges σ est :

- [A] $\mathrm{C\ m^{-3}}$
- ■ $\mathrm{C\ m^{-2}}$
- [C] $\mathrm{C\ m^{-1}}$
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 5 (0.5 point)
Un volume V a une *distribution volumique de charges* de densité ρ non uniforme, la charge totale Q vaut alors :

- [A] $Q = \iint_S \rho dV$
- [B] $Q = \rho V$
- ■ $Q = \iiint_V \rho dV$
- [D] $Q = \iint_V \rho dV$
- [E] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 6 (0.5 point)
Le *champ électrostatique* créé par une *distribution volumique de charges* peut s'écrire :

[A]
$$\vec{E}(M) = \iiint_{M\in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$$

[B]
$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{u}$$

■
$$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in V} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$$

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 7 (0.5 point)
En étudiant les plans de *symétrie pour la distribution des charges*, on trouve que

[A] la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ en M est celle de la droite intersection d'au moins deux plans d'anti-symétrie, passant par M.

[B] la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ en M est celle de la droite orthogonale à un plan Π de symétrie, passant par M.

■ le champ électrostatique $\vec{E}$ en M est contenu dans tout plan Π de symétrie, passant par M.

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 8 (0.5 point)
Puisque le champ électrostatique $\vec{E}$ est à circulation conservative, on définit la fonction potentiel électrostatique V par :

[A] $\vec{V} = \overrightarrow{grad}E$

■ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

[C] $\vec{E} = \overrightarrow{grad}V$

[D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 9 (0.5 point)
À partir de la figure 2, on peut écrire le champ électrostatique créé par *une distribution volumique quelconque de charges* de densité ρ comme :

■

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{P\in V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(r')dV$$

B

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{P\in V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(r)dV$$

C

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint\limits_{P\in V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} \rho(r')dV$$

D *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 10 (0.5 point)
Soient les charges q' en M et q en P, le champ électrostatique en M s'écrit :

A $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(PM)^2} \overrightarrow{PM}$

■ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(PM)^3} \overrightarrow{PM}$

C $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{(PM)^3} \overrightarrow{PM}$

D *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

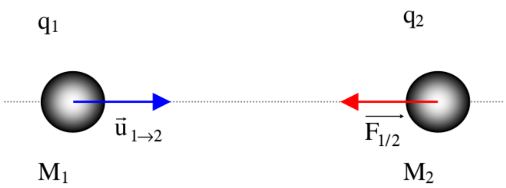


FIGURE 1 – Loi de Coulomb pour deux charges opposées.

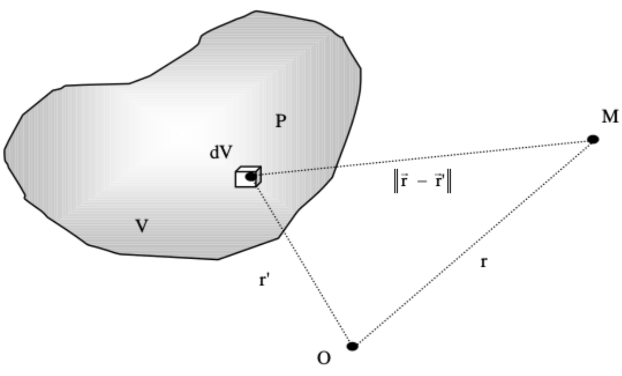


FIGURE 2 – Distribution volumique quelconque de charges.

Charges ponctuelles (5 points)

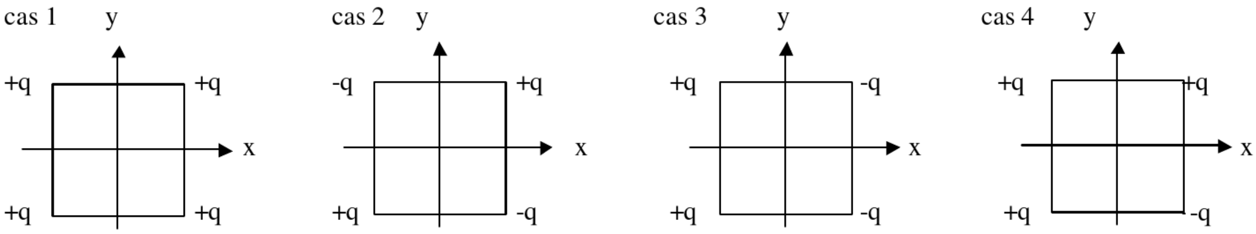


Figure 3 – Quatre configurations pour les charges ponctuelles.

Soit quatre charges ponctuelles disposées aux sommets d'un carré dont la longueur de la diagonale est $2a$. On prendra la charge q positive.

On cherche à exprimer les composantes du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(O)$, à l'origine du repère noté O du carré dans les configurations détaillées sur la figure 3.

Question 11 (1 point)
Dans le cas 1, les composantes de $\overrightarrow{E}(O)$ valent :

- A $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- B $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- ■ $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = 0$
- D $E_x(O) = +\dfrac{q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = 0$
- E $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- F $E_x(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- G *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 12 (1 point)
Dans le cas 2, les composantes de $\overrightarrow{E}(O)$ valent :

- ■ $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = 0$
- B $E_x(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- C $E_x(O) = +\dfrac{q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = 0$
- D $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- E $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- F $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- G *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 13 (1 point)
Dans le cas 3, les composantes de $\overrightarrow{E}(O)$ valent :

- A $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- B $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = 0$
- C $E_x(O) = 0$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- ■ $E_x(O) = +\dfrac{q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = 0$
- E $E_x(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- F $E_x(O) = +\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$ et $E_y(O) = -\dfrac{q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$
- G *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 14 (2 points)
Donner l'expression des composantes du champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour le cas 4, en détaillant.
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Sphère chargée en surface (5 points)

On considère une sphère de rayon R, de centre O et chargée uniformément avec une densité surfacique de charges σ.

Question 15 (0.5 point)
Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est alors :

- [A] continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.
- [B] continu en tout point de l'espace.
- ■ continu en tout point de l'espace sauf à la traversée de la surface chargée de la sphère.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 16 (0.5 point)
La direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, au point M, créé par cette distribution est radiale car :

- [A] les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\phi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- ■ tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- [C] les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 17 (1 point)
En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r < R$:

- [A] $\overrightarrow{E} = \dfrac{2\sigma}{3\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- [B] $\overrightarrow{E} = \dfrac{2\sigma R^2}{3\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- [C] $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- ■ $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- [E] $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- [F] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 18 (1 point)
En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r > R$:

- [A] $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- [B] $\overrightarrow{E} = \dfrac{2\sigma}{3\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- [C] $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{u_r}$
- [D] $\overrightarrow{E} = \dfrac{2\sigma R^2}{3\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- [E] $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$
- ■ *Aucune des réponses précédentes n'est correcte.*

Question 19 (2 points)
Démontrer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour $r > R$, en détaillant les calculs (symétries, invariances, surface de Gauss, flux, charges q_{int} ...).
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Cylindre chargé en volume (5 points)

On considère un cylindre de rayon R, de hauteur infinie et chargé uniformément avec une densité volumique de charges ρ.

Question 20 (0.5 point)
Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par cette distribution est alors :

- [A] continu en tout point de l'espace, sauf sur les charges.
- ■ continu en tout point de l'espace.
- [C] continu en tout point de l'espace sauf à la traversée de la surface chargée du cylindre.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 21 (0.5 point)
La direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, au point M, créé par cette distribution est radiale car :

- [A] les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\phi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- ■ les plans $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_z})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- [C] tous les plans passant par O et par M sont des plans de symétrie de la distribution de charges.
- [D] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 22 (1 point)
En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r < R$:

- [A] $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- ■ $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \overrightarrow{u_r}$
- [C] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \overrightarrow{u_r}$
- [D] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \overrightarrow{u_r}$
- [E] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r \overrightarrow{u_r}$
- [F] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 23 (1 point)
En utilisant le théorème de Gauss, on trouve que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ vaut pour $r > R$:

- ■ $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \overrightarrow{u_r}$
- [B] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \overrightarrow{u_r}$
- [C] $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
- [D] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} r \overrightarrow{u_r}$
- [E] $\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \overrightarrow{u_r}$
- [F] *Aucune des réponses précédentes n'est correcte*

Question 24 (2 points)
Démontrer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ pour $r > R$, en détaillant les calculs (symétries, invariances, surface de Gauss, flux, charges q_{int} ...).
Répondez sur la feuille correspondante, à la fin du sujet.

Correction

Électromagnétisme - PréIng2 - CC1 - 2023/2024

NOM : ....

Prénom : ....

n° Groupe : ....

Nom du chargé de TD : ....

CODAGE DU N° ÉTUDIANT *horizontalement* (DANS LE SENS DE LECTURE)

Premier chiffre du n° étudiant

Dernier chiffre du n° étudiant

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE $\longrightarrow$ DU N° ÉTUDIANT

Correction

Les réponses au QCM ne doivent être apportées que sur cette feuille.
La copie ne sera corrigée que si :

- **elle comporte vos nom, prénom et groupe ;**
- **les cases sont complètement coloriées avec un stylo noir ;**
- **la feuille-réponse ne comporte pas de ratures.**

Question 1 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 2 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$

Question 3 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 4 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 5 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$

Question 6 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$

Question 7 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$

Question 8 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 9 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 10 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 11 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ $\boxed{G}$

Question 12 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ $\boxed{G}$

Question 13 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$ $\boxed{G}$

Question 15 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ ■ $\boxed{D}$

Question 16 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 17 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$

Question 18 : $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ ■

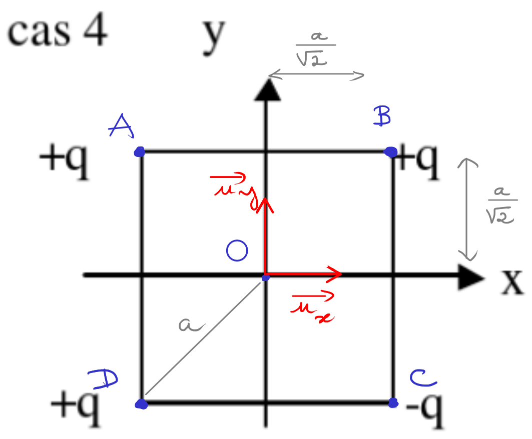
Question 20 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 21 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$

Question 22 : $\boxed{A}$ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$

Question 23 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$

Question 14 : **Quatre charges sur un carré** *Réservé à l'enseignant(e)*



- $$\vec{E}(O) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AO}}{\|\vec{AO}\|^3} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{BO}}{\|\vec{BO}\|^3} + \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{CO}}{\|\vec{CO}\|^3} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{DO}}{\|\vec{CO}\|^3}$$

- $\|\vec{AO}\| = \|\vec{BO}\| = \|\vec{CO}\| = \|\vec{DO}\| = a$

- $$\vec{AO} = +\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_x - \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$$
$$\vec{BO} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_x - \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$$
$$\vec{CO} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$$
$$\vec{DO} = +\frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{a}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$$

0,5 pt

0,5 pt

- $q_A = q_B = q_D = +q$ et $q_C = -q$

donc :

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[\underbrace{\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{DO} - \vec{CO}}_{+\frac{2a}{\sqrt{2}}\vec{u}_x - \frac{2a}{\sqrt{2}}\vec{u}_y}\right]$$

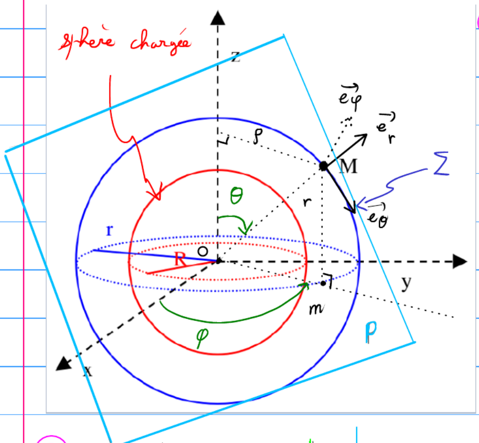
finalement :

$$\boxed{\vec{E}(O) = \frac{q}{2\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\vec{u}_x - \vec{u}_y\right]}$$

1 pt

Question 19 : Sphère chargée en surface [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

⓪ $P_1 = (M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$



① • système de coordonnées sphériques :

$$\{O, (\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})\}$$

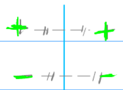
$$\vec{OM} = r\,\vec{e_r}$$

$$\text{et } \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi}) = \vec{E}(M)$$

② • invariances : sphère uniformément chargée donc la distribution de charge reste la même si on varie en θ et φ

$$\vec{E}(r)$$

direction de $\vec{E}$ ← ③ symétries :



tout plan P passant par M et O (centre de la sphère) est un plan de symétrie ($+\rho \to +\rho$ la même)

↳ ∞ de ces plans de symétrie et leur direction commune est $\vec{e_r}$.

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}} \quad P_1$$

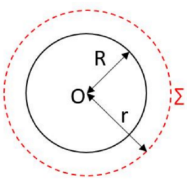
④ Théorème de Gauss : calcul du flux de $\vec{E}$

produit scalaire

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint_{\Sigma} E(r)\,\underbrace{\vec{e_r} \cdot \vec{dS}}_{= \vec{dS}\cdot\vec{e_r} = dS_r} = \oiint_{\Sigma} E(r)\,dS_r$$

$$\text{donc } \Phi(\vec{E}) = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} E(r)\,r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi = r^2 E(r) \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}_{\text{variables séparables}}$$

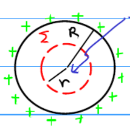
sphère Σ à r donné
⇒ $r^2 E(r)$ constant



$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}) = r^2 E(r) \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,d\theta}_{=2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} = 4\pi r^2 E(r)$$

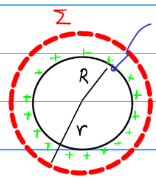
$$\boxed{\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$ Théorème de Gauss

a) $r < R$:



$$q_{int} = 0 \Rightarrow E(r<R) = 0$$

b) $r > R$:



$$q_{int} = Q = \sigma\,4\pi R^2$$

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r>R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

0,5 pt

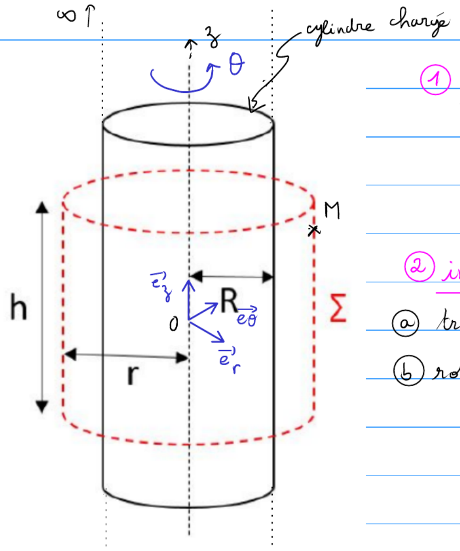
0,5 pt

0,5 pt

0,5 pt

Question 24 : **Cylindre chargé en volume** *Réservé à l'enseignant(e)*

⓪



① système de coordonnées cylindriques :

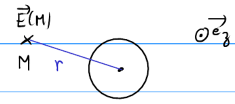
$\{O ; (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)\}$ ⓑ ⓐ

$\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})$

② invariances : cylindre ∞ ⓐ et chargé uniformément ⓑ

ⓐ translation selon Oz : distribution de charges inchangée

ⓑ rotation autour de Oz : " " " "



$\vec{E}(r)$

• $\Pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$: la distribution de charge reste inchangée par symétrie par rapport à Π_1

$\Rightarrow \vec{E} \in \Pi_1$.

• $\Pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le cylindre étant ∞, la distribution reste inchangée par symétrie par rapport à Π_2

$\Rightarrow \vec{E} \in \Pi_2$

donc $\vec{E} \in (\Pi_1 \cup \Pi_2)$; $\vec{E}$ a pour direction la droite commune à Π_1 et Π_2 $\Rightarrow$ selon $\vec{e}_r$

$\boxed{\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r}$

0,5 pt

④ Théorème de Gauss : calcul de $\Phi(\vec{E})$ sur la surface Σ, surface de Gauss, fermée.

Σ = cylindre de hauteur h, de rayon r, de même axe que le cylindre chargé.

$$\boxed{\Phi(\vec{E}) \triangleq \oiint_{\Sigma\text{ : surface de Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \oiint_{\Sigma} E(r)\,\vec{e}_r \cdot \overbrace{d\vec{S}}^{dS_r} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(r)\; r\, d\theta\, dz$$

r fixé donc

0,5 pt

$$= 2\pi r h\; E(r) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

0,5 pt

1) $r \leq R$: $q_{int} = \rho \times \pi r^2 h$

$$E(r) = \frac{q_{int}}{2\pi r h\,\varepsilon_0} = \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\right) r$$

2) $r \geq R$: $q_{int} = \rho \times \pi R^2 h$

$$E(r) = \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\right)\frac{R^2}{r}$$

0,5 pt

Feuille supplémentaire - (indiquer le numéro de la question rédigée)